

## Đề thi thử đại học môn toán năm 2011 lần thứ 1

### Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  (1).

- 1) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
- 2) Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích hệ số góc bằng - 9.

### Câu II. (2 điểm)

1) Giải phương trình sau:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2.$

2) Giải phương trình lượng giác:  $\frac{\sin^4 2x + \cos^4 2x}{\tan(\frac{\pi}{4} - x) \cdot \tan(\frac{\pi}{4} + x)} = \cos^4 4x.$

### Câu III. (1 điểm) Tính giới hạn sau:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2e - e \cdot \cos 2x) - \sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}$$

### Câu IV. (2 điểm)

Cho hình nón đỉnh S có độ dài đường sinh là  $\ell$ , bán kính đường tròn đáy là  $r$ . Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình nón (mặt cầu bên trong hình nón, tiếp xúc với tất cả các đường sinh và đường tròn đáy của nón gọi là mặt cầu nội tiếp hình nón).

1. Tính theo  $r, \ell$  diện tích mặt cầu tâm I;
2. Giả sử độ dài đường sinh của nón không đổi. Với điều kiện nào của bán kính đáy thì diện tích mặt cầu tâm I đạt giá trị lớn nhất?

### Câu V (1 điểm) Cho các số thực $x, y, z$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 2.$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$

### Câu VI. (1 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm

$$I(\frac{1}{2}; 0)$$

Đường thẳng AB có phương trình:  $x - 2y + 2 = 0$ ,  $AB = 2AD$  và hoành độ điểm A âm. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đó.

**Câu VII. (1 điểm) Giải hệ phương trình :**

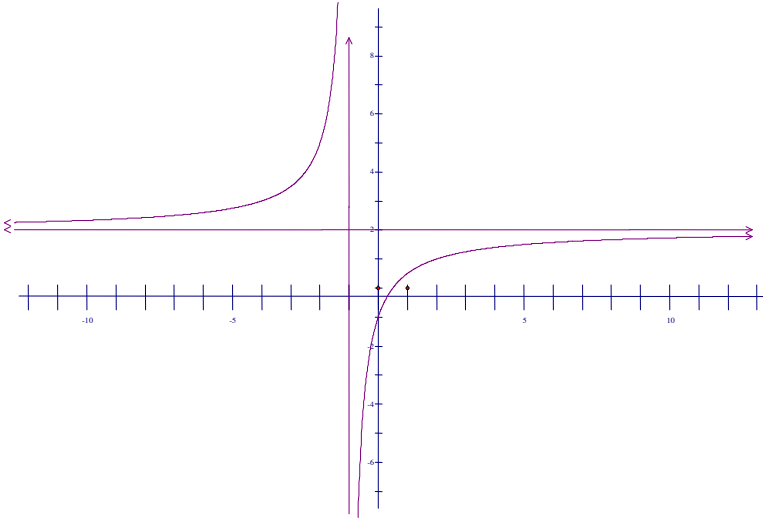
$$\begin{cases} 2009y^2 - x^2 = \frac{x^2 + 2010}{y^2 + 2010} \\ 3\log_3(x + 2y + 6) = 2\log_2(x + y + 2) + 1 \end{cases}$$

----- HẾT -----

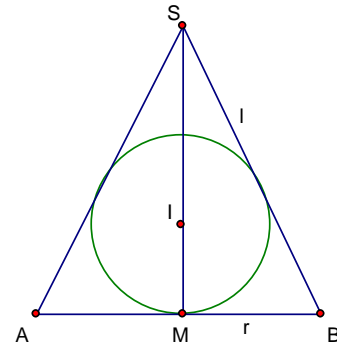
**Ghi chú:**      - *Thí sinh không được sử dụng bất cứ tài liệu gì!*  
                     - *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!*

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

**HƯỚNG DẪN**

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM												
<p><b>I.1</b></p>	<p>Hàm số: <math>y = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}</math></p> <p>+) Giới hạn, tiệm cận: <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2; \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty</math></p> <p>- TC đứng: <math>x = -1</math>; TCN: <math>y = 2</math>.</p> <p>+) <math>y' = \frac{3}{(x+1)^2} &gt; 0, \forall x \in D</math></p> <p>+) BBT:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-1</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>+</td> <td>  </td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>2</td> <td><math>\begin{matrix} +\infty \\    \\ -\infty \end{matrix}</math></td> <td>2</td> </tr> </table> <p>+) ĐT:</p> 	x	$-\infty$	$-1$	$+\infty$	y'	+		+	y	2	$\begin{matrix} +\infty \\    \\ -\infty \end{matrix}$	2	<p><b>1 điểm</b></p>
x	$-\infty$	$-1$	$+\infty$											
y'	+		+											
y	2	$\begin{matrix} +\infty \\    \\ -\infty \end{matrix}$	2											
<p><b>I.2</b></p>	<p>+) Ta có <math>I(-1; 2)</math>. Gọi <math>M \in (C) \Rightarrow M(x_0; 2 - \frac{3}{x_0+1}) \Rightarrow k_M = \frac{y_M - y_I}{x_M - x_I} = \frac{-3}{(x_0+1)^2}</math></p> <p>+) Hệ số góc của tiếp tuyến tại M: <math>k_M = y'(x_0) = \frac{3}{(x_0+1)^2}</math></p> <p>+) <math>ycbt \Leftrightarrow k_M \cdot k_{IM} = -9</math></p> <p>+) Giải được <math>x_0 = 0; x_0 = -2</math>. Suy ra có 2 điểm M thỏa mãn: <math>M(0; -3), M(-2; 5)</math></p>	<p><b>1 điểm</b></p>												
<p><b>II.1</b></p>	<p>+) ĐK: <math>x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{0\}</math></p> <p>+) Đặt <math>y = \sqrt{2-x^2}, y &gt; 0</math> Ta có hệ: <math>\begin{cases} x + y = 2xy \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}</math></p> <p>+) Giải hệ đx ta được <math>x = y = 1</math> và <math>\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}</math></p> <p>+) Kết hợp điều kiện ta được: <math>x = 1</math> và <math>x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}</math></p>	<p><b>1 điểm</b></p>												
<p><b>II.2</b></p>	<p>+) ĐK: <math>x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in Z</math></p>	<p><b>1 điểm</b></p>												

	<p>+) <math>\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cot\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1</math></p> <p><math>\sin^4 2x+\cos^4 2x=1-\frac{1}{2}\sin^2 4x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 4x</math></p> <p><math>pt \Leftrightarrow 2\cos^4 4x-\cos^2 4x-1=0</math></p> <p>+) Giải pt được <math>\cos^2 4x=1 \Leftrightarrow \cos 8x=1 \Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{4}</math> và <math>\cos^2 4x=-1/2</math> (VN)</p> <p>+) Kết hợp ĐK ta được nghiệm của phương trình là <math>x=k\frac{\pi}{2}, k \in Z</math></p>													
<p><b>III</b></p>	<p><math>L=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2e-e \cdot \cos 2x)-\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+1-\cos 2x)+1-\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2}</math></p> <p><math>=\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1+2\sin^2 2x)}{x^2} + \frac{1-\sqrt[3]{1+x^2}}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(1+2\sin^2 2x)}{2\sin^2 x} + \frac{-1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} \right]</math></p> <p><math>=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}</math></p>	<p><b>1 điểm</b></p>												
<p><b>IV.1</b></p>	<p>+) Gọi <math>r_c</math> là bán kính mặt cầu nội tiếp nón, và cũng là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB.</p> <p><math>S_{SAB}=pr_c=(l+r) \cdot r_c=\frac{1}{2}SM \cdot AB</math></p> <p>Ta có: <math>\Rightarrow r_c=\frac{\sqrt{l^2-r^2} \cdot 2r}{2(l+r)}=r\sqrt{\frac{l-r}{l+r}}</math></p> <p>+) <math>S_{\text{cầu}}=4\pi r_c^2=4\pi r^2 \frac{l-r}{l+r}</math></p>	<p><b>1 điểm</b></p>												
<p><b>IV.2</b></p>	<p>+) Đặt :</p> <p><math>y(r)=\frac{lr^2-r^3}{l+r}, 0 &lt; r &lt; l</math></p> <p>+) <math>y'(r)=\frac{-2r(r^2+rl-l^2)}{(l+r)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} r=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}l \\ r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}l \end{cases}</math></p> <p>+) BBT:</p> <table border="1" data-bbox="389 1697 1123 1962"> <tbody> <tr> <td>r</td> <td>0</td> <td><math>\frac{\sqrt{5}-1}{2}l</math></td> <td>l</td> </tr> <tr> <td>y'(r)</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>y(r)</td> <td></td> <td><math>y_{\max}</math></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>+) Ta có <math>\max S_{\text{cầu}} \text{ đạt} \Leftrightarrow y(r) \text{ đạt max} \Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}l</math></p>	r	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}l$	l	y'(r)				y(r)		$y_{\max}$		<p><b>1 điểm</b></p>
r	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}l$	l											
y'(r)														
y(r)		$y_{\max}$												
<p><b>V</b></p>	<p>+) Ta có</p>	<p><b>1 điểm</b></p>												



	$P = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ $P = (x + y + z) \left[ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z)^2}{2} \right]$ $P = (x + y + z) \left[ 2 + \frac{2 - (x + y + z)^2}{2} \right] = (x + y + z) \left[ 3 + \frac{(x + y + z)^2}{2} \right]$ <p>+) Đặt <math>x + y + z = t</math>, <math> t  \leq \sqrt{6}</math> (Bunhia cov xki), ta được: <math>P(t) = 3t - \frac{1}{2}t^3</math></p> <p>+) <math>P'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}</math>, <math>P(\pm\sqrt{2}) = 0</math>; <math>P(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}</math>; <math>P(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}</math></p> <p>+) KL: <math>MaxP = 2\sqrt{2}</math>; <math>MinP = -2\sqrt{2}</math></p>	
<p><b>VI</b></p>	<p>+) <math>d(I, AB) = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AD = \sqrt{5} \Rightarrow AB = 2\sqrt{5} \Rightarrow BD = 5</math>.</p> <p>+) PT đường tròn ĐK BD: <math>(x - 1/2)^2 + y^2 = 25/4</math></p> <p>+) Tọa độ A, B là nghiệm của hệ: <math display="block">\begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4} \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 0), B(2; 2)</math></p> <p><math>\Rightarrow C(3; 0), D(-1; -2)</math></p>	
<p><b>VII</b></p>	$\begin{cases} 2009y^2 - x^2 = \frac{x^2 + 2010}{y^2 + 2010} & (1) \\ 3\log_3(x + 2y + 6) = 2\log_2(x + y + 2) + 1 & (2) \end{cases}$ <p>+) ĐK: <math>x + 2y = 6 &gt; 0</math> và <math>x + y + 2 &gt; 0</math></p> <p>+) Lấy loga cơ số 2009 và đưa về pt:  <math>x^2 + \log_{2009}(x^2 + 2010) = y^2 + \log_{2009}(y^2 + 2010)</math></p> <p>+) Xét và CM HS <math>f(t) = t + \log_{2009}(t + 2010), t \geq 0</math> đồng biến,  từ đó suy ra <math>x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y, x = -y</math></p> <p>+) Với <math>x = y</math> thế vào (2) và đưa về pt: <math>3\log_3(x + 2) = 2\log_2(x + 1) = 6t</math></p> <p>Đưa pt về dạng <math>\left(\frac{1}{9}\right)^t + \left(\frac{8}{9}\right)^t = 1</math>, cm pt này có nghiệm duy nhất <math>t = 1</math></p> <p><math>\Rightarrow x = y = 7</math></p> <p>+) Với <math>x = -y</math> thế vào (2) được pt: <math>\log_3(y + 6) = 1 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow x = 3</math></p>	

**Ghi chú:**

- Các cách giải khác với cách giải trong đáp án mà vẫn đúng, đủ thì cũng cho điểm tối đa.

- Người chấm có thể chia nhỏ thang điểm theo gợi ý các bước giải.