

## ĐỀ THI THỬ ĐẠI HỌC LẦN II

NĂM HỌC: 2010-2011

Môn thi : TOÁN

LÀM BÀI: 180 PHÚT THỜI GIAN (không kể thời gian giao đề)

### PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

**Câu I: (2 điểm)** Cho hàm số  $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$  có đồ thị là  $(C_m)$ ; ( $m$  là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi  $m = 3$ .
2. Xác định  $m$  để  $(C_m)$  cắt đường thẳng:  $y = 1$  tại ba điểm phân biệt  $C(0;1)$ ,  $D$ ,  $E$  sao cho các tiếp tuyến của  $(C_m)$  tại  $D$  và  $E$  vuông góc với nhau.

**Câu II: (2 điểm)**

1. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{2y-1} = 1 \end{cases}$$
2. Tìm  $x \in (0; \pi)$  thoả mãn phương trình:  $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$ .

**Câu III: (2 điểm)**

1. Trên cạnh  $AD$  của hình vuông  $ABCD$  có độ dài là  $a$ , lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = x$  ( $0 < x \leq a$ ). Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$  tại  $A$ , lấy điểm  $S$  sao cho  $SA = 2a$ .
  - a) Tính khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(SAC)$ .
  - b) Kẻ  $MH$  vuông góc với  $AC$  tại  $H$ . Tìm vị trí của  $M$  để thể tích khối chóp  $SMCH$  lớn nhất
2. Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + \sin^2 2x) \cos 2x dx$ .

**Câu IV: (1 điểm)**: Cho các số thực dương  $a, b, c$  thay đổi luôn thoả mãn:  $a + b + c = 1$ .

Chứng minh rằng: 
$$\frac{a + b^2}{b + c} + \frac{b + c^2}{c + a} + \frac{c + a^2}{a + b} \geq 2.$$

### PHẦN RIÊNG (3 điểm) (Chú ý! Thí sinh chØ ®-íc chän bµi lµm ë mét phÇn)

**A. Theo chương trình chuẩn**

**Câu Va**: 1. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác  $ABC$  biết  $A(2; -3)$ ,  $B(3; -2)$ , có diện tích bằng  $\frac{3}{2}$  và

trọng tâm thuộc đường thẳng  $\Delta: 3x - y - 8 = 0$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C$ .

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm  $A(1;4;2)$ ,  $B(-1;2;4)$

và đường thẳng  $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên  $\Delta$  sao cho:  $MA^2 + MB^2 = 28$

**Câu Vb**: Giải bất phương trình:  $(2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x + 1} + (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x - 1} \leq \frac{4}{2 - \sqrt{3}}$

**B. Theo chương trình Nâng cao**

**Câu Vb**: 1. Trong mpOxy, cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ . Tìm  $M$  thuộc trục tung sao cho qua  $M$  kẻ được hai tiếp tuyến của  $(C)$  mà góc giữa hai tiếp tuyến đó bằng  $60^\circ$ .

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm  $M(2; 1; 0)$  và đường thẳng  $d$  với

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ . Viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm  $M$ ,

cắt và vuông góc với đường thẳng  $d$  và tìm tọa độ của điểm  $M'$  đối xứng với  $M$  qua  $d$

**Câu VIb:** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} 4^{\log_3 xy} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ \log_4 (x^2 + y^2) + 1 = \log_4 2x + \log_4 (x + 3y) \end{cases}$$

.....Hết.....  
 (Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

**ĐÁP ÁN**

Câu	ý	Nội Dung	Điểm												
<b>I</b>			2												
	<b>1</b>	<p>Khảo sát hàm số (1 điểm)</p> <p><math>y = x^3 + 3x^2 + mx + 1 \quad (C_m)</math></p> <p>1. <math>m = 3 : y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad (C_3)</math></p> <p>+ TXÑ: <math>D = \mathbb{R}</math></p> <p>+ Giới hạn: <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty</math></p>	1												
		<p>+ <math>y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2 \geq 0; \forall x</math></p> <p><math>\Rightarrow</math> hàm số đồng biến trên <math>\mathbb{R}</math></p>	0,25												
		<p>• Bảng biến thiên:</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>x</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-\infty</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>-1</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>y'</math></td> <td colspan="3" style="text-align: center; padding: 5px;"><math>0</math></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"><math>y</math></td> <td colspan="3" style="text-align: right; padding: 5px;"><math>+\infty</math></td> </tr> </table> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;"> </p>	$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$	$y'$	$0$			$y$	$+\infty$			0,25
$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$												
$y'$	$0$														
$y$	$+\infty$														
		<p>+ <math>y'' = 6x + 6 = 6(x + 1)</math></p> <p><math>y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow</math> tâm đối xứng <math>U(-1;0)</math></p> <p>* Nọa thò <math>(C_3)</math>:</p> <p>Qua <math>A(-2 ; -1) ; U(-1 ; 0) ; A'(0 ; 1)</math></p> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;"> </div>	0,25												
	<b>2</b>		1												

		<p>Phöông trình hoặnh ñoà giao ñieäm cuõa <math>(C_m)</math> vaø ñoøng thaúng <math>y = 1</math> laø:</p> $x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3x + m = 0 \end{cases} \quad (2)$	0,25
		<p>* <math>(C_m)</math> caét ñoøng thaúng <math>y = 1</math> tại <math>C(0;1)</math>, <math>D</math>, <math>E</math> phaân bieät:  <math>\Leftrightarrow</math> Phöông trình (2) coù 2 nghiëäm <math>x_D, x_E \neq 0</math>.</p> $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ 0^2 + 3 \cdot 0 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{9}{4} \end{cases} (*)$	0,25
		<p>Luùc ñoø tieáp tuyeán tại <math>D, E</math> coù heä soá goùc laàn löët laø:</p> $k_D = y'(x_D) = 3x_D^2 + 6x_D + m = -(3x_D + 2m);$ $k_E = y'(x_E) = 3x_E^2 + 6x_E + m = -(3x_E + 2m).$ <p>Caùc tieáp tuyeán tại <math>D, E</math> vuông goùc khi vaø chæ khi: <math>k_D k_E = -1</math></p>	0,25
		<p><math>\Leftrightarrow (3x_D + 2m)(3x_E + 2m) = -1</math>  <math>\Leftrightarrow 9x_D x_E + 6m(x_D + x_E) + 4m^2 = -1</math>  <math>\Leftrightarrow 9m + 6m(-3) + 4m^2 = -1</math> (vì <math>x_D + x_E = -3</math>; <math>x_D x_E = m</math> theo ñònh lý Vi-ét).  <math>\Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} \\ m = \frac{9 - \sqrt{65}}{8} \end{cases}</math></p> <p>▪ So sánh ñk (*): <math>m = \frac{1}{8}(9 - \sqrt{65})</math></p>	0,25
<b>II</b>			<b>2</b>
	<b>1</b>		<b>1</b>
		<p>1. Đk: <math>\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases}</math></p> <p>(1)</p> $\Leftrightarrow x - y - (y + \sqrt{xy}) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0 \text{ (volý)} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2\sqrt{y}$	0,5
		<p><math>\Leftrightarrow x = 4y</math> Thay vào (2) có</p>	0,25

	$\sqrt{4y-1} - \sqrt{2y-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{4y-1} = \sqrt{2y-1} + 1$ $\Leftrightarrow 4y-1 = 2y-1 + 2\sqrt{2y-1} + 1 \Leftrightarrow 2y-1 = 2\sqrt{2y-1}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2y-1} = 0 \\ \sqrt{2y-1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}(tm) \\ y = \frac{5}{2}(tm) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 10 \end{cases}$	
	Vậy hệ có hai nghiệm $(x;y) = (2;1/2)$ và $(x;y) = (10;5/2)$	0,25
<b>2</b>		1
	$\square K: \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \sin x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases}$ $PT \Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\cos 2x \cdot \cos x}{\cos x + \sin x} + \sin^2 x - \sin x \cos x$ $\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x - \sin x \cos x$	0,25
	$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = \sin x(1 - \sin 2x)$ $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x \cos x - \sin^2 x - 1) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin 2x + \cos 2x - 3) = 0$ $\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 3(voly) \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) (tmdk)$ $\text{Do } x \in (0; \pi) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$	0,25
<b>III</b>		<b>2</b>
	1	1
	Do $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$ Lại có	0,25

	<p><math>MH \perp AC = (SAC) \cap (ABCD)</math></p> <p><math>\Rightarrow MH \perp (SAC) \Rightarrow d(M, SAC) = MH = AM \cdot \sin 45^\circ = \frac{x}{\sqrt{2}}</math></p> <hr/> <p>Ta có</p> $AH = AM \cdot \cos 45^\circ = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow HC = AC - AH = a\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow S_{\Delta MHC} = \frac{1}{2} MH \cdot MC = \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{2}} (a\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}})$ $\Rightarrow V_{SMCH} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta MCH} = \frac{1}{6} 2a \frac{x}{\sqrt{2}} (a\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}})$ <hr/> <p>Từ biểu thức trên ta có:</p> $V_{SMCH} \leq \frac{1}{3} a \left[ \frac{\frac{x}{\sqrt{2}} + a\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}}{2} \right]^2 = \frac{a^3}{6}$ $\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow x = a$ $\Leftrightarrow M \text{ trùng với } D$	<p>0,5</p> <p>0,25</p>
<p><b>2</b></p>		<p><b>1</b></p>
	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + \sin^2 2x) \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x \cos 2x dx = I_1 + I_2$	<p>0,25</p>
	<p><u>Tính <math>I_1</math></u></p> $\text{đặt } \begin{cases} u = x \\ v = \int \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases} \Rightarrow I_1 = \frac{x}{2} \sin 2x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$ $= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$	<p>0,25</p>

		<p><u>Tính <math>I_2</math></u></p> $I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{6}$	0,25
		<p>Vậy <math>I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{12}</math></p>	0,25
<b>IV</b>	<b>1</b>		<b>1</b>
		<p>Ta có : <math>VT = \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) + \left(\frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{a+b}\right) = A + B</math></p>	0,25
		$A + 3 = \frac{1}{2} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left[ \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right]$ $\geq \frac{1}{2} 3\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)} 3\sqrt{\frac{1}{a+b} \frac{1}{b+c} \frac{1}{c+a}} = \frac{9}{2}$ $\Rightarrow A \geq \frac{3}{2}$	0,25
		$1^2 = (a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}\right)(a+b+b+c+c+a)$ $\Leftrightarrow 1 \leq B \cdot 2 \Leftrightarrow B \geq \frac{1}{2}$	0,25
		<p>Từ đó ta có <math>VT \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 = VP</math></p> <p>Dấu đẳng thức xảy ra khi <math>a=b=c=1/3</math></p>	0,25
<b>V.a</b>			<b>2</b>
	<b>1</b>		<b>1</b>
		<p>Ta có: <math>AB = \sqrt{2}</math>, trung điểm <math>M \left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)</math>,</p> <p>pt (AB): <math>x - y - 5 = 0</math></p>	0,25
		$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} d(C, AB) \cdot AB = \frac{3}{2} \Rightarrow d(C, AB) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ <p>Gọi <math>G(t; 3t-8)</math> là trọng tâm tam giác ABC thì <math>d(G, AB) = \frac{1}{\sqrt{2}}</math></p>	0,25

		$\Rightarrow d(G, AB) = \frac{ t - (3t - 8) - 5 }{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 2$ $\Rightarrow G(1; -5) \text{ hoặc } G(2; -2)$	0,25
		Mà $\overline{CM} = 3\overline{GM} \Rightarrow C = (-2; -10) \text{ hoặc } C = (1; -1)$	0,25
<b>2</b>			<b>1</b>
		$pts\Delta : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \Rightarrow M(1 - t; -2 + t; 2t) \\ z = 2t \end{cases}$	0,5
		Ta có: $MA^2 + MB^2 = 28 \Leftrightarrow 12t^2 - 48t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = 2$	0,25
		Từ đó suy ra : M (-1 ; 0 ; 4)	0,25
<b>VI.a</b>	<b>1</b>		<b>1</b>
		$Bpt \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} + (2 - \sqrt{3})^{x^2 - 2x} \leq 4$	0,25
		$t = (2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} (t > 0) \quad BPTTT : \quad t + \frac{1}{t} \leq 4$ $\Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} \leq t \leq 2 + \sqrt{3} \text{ (tm)}$	0,25
		Khi đó : $2 - \sqrt{3} \leq (2 + \sqrt{3})^{x^2 - 2x} \leq 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 2x \leq 1$	0,25
		$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$	0,25

<b>V.b</b>			<b>2</b>
	<b>1</b>		<b>1</b>
		<p>(C) có tâm I(3;0) và bán kính R = 2; M ∈ Oy ⇒ M(0;m)                  Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB ( A và B là hai tiếp điểm)</p> <p>Vậy <math>\begin{cases} \angle AMB = 60^\circ \text{ (1)} \\ \angle AMB = 120^\circ \text{ (2)} \end{cases}</math> Vì MI là phân giác của <math>\angle AMB</math></p> <p>(1) <math>\Leftrightarrow \angle AMI = 30^\circ \Leftrightarrow MI = \frac{IA}{\sin 30^\circ} \Leftrightarrow MI = 2R \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 9} = 4 \Leftrightarrow m = \mp\sqrt{7}</math></p> <p>(2) <math>\Leftrightarrow \angle AMI = 60^\circ \Leftrightarrow MI = \frac{IA}{\sin 60^\circ} \Leftrightarrow MI = \frac{2\sqrt{3}}{3}R \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 9} = \frac{4\sqrt{3}}{3}</math> Vô</p>	0,5
			0,5

	<p>nghiệm</p> <p>Vậy có hai điểm <math>M_1(0; \sqrt{7})</math> và <math>M_2(0; -\sqrt{7})</math></p>	
<b>2</b>		<b>1</b>
<b>VIb</b>	<p>Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên d, ta có MH là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d.</p> <p>d có phương trình tham số là: <math display="block">\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}</math></p> <p>Vì <math>H \in d</math> nên tọa độ H <math>(1 + 2t; -1 + t; -t)</math>. Suy ra: <math>\overline{MH} = (2t - 1; -2 + t; -t)</math></p>	0,25
	<p>Vì <math>MH \perp d</math> và d có một vector chỉ phương là <math>\vec{u} = (2; 1; -1)</math>, nên:</p> <p><math>2 \cdot (2t - 1) + 1 \cdot (-2 + t) + (-1) \cdot (-t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}</math>. Vì thế, <math>\overline{MH} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)</math></p> <p><math>\vec{u}_{MH} = 3\overline{MH} = (1; -4; -2)</math></p>	0,25
	<p>Suy ra, phương trình chính tắc của đường thẳng MH là: <math>\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}</math></p>	0,25
	<p>Theo trên có <math>H\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)</math> mà H là trung điểm của MM' nên tọa độ</p> <p><math>M' \left(\frac{8}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right)</math></p>	0,25
	<p>ĐK: <math>x &gt; 0, y &gt; 0</math></p> <p>(1) <math>\Leftrightarrow 2^{2\log_3 xy} - 2^{\log_3 xy} - 2 = 0</math></p>	0,5
	<p><math>\Leftrightarrow \log_3 xy = 1 \Leftrightarrow xy = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x}</math></p> <p>(2) <math>\Leftrightarrow \log_4(4x^2 + 4y^2) = \log_4(2x^2 + 6xy) \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 9</math></p>	0,25
	<p>Kết hợp (1), (2) ta được nghiệm của hệ: <math>(\sqrt{3}; \sqrt{3})</math> hoặc <math>(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{2})</math></p>	0,25



