Đề chọn học sinh giỏi có đáp án môn: Toán - Lớp 12 (Năm học 2015-2016)

ĐỀ BÀI

Câu I. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Chứng minh rằng *d:* $y = -2x + m$ cắt (*C*) tại hai điểm *A*, *B* phân biệt với mọi số thực *m*. Gọi $k_1,\ k_2$ lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (*C*) tại *A* và *B*. Tìm *m* để $P = (k_1)^{2013} + (k_2)^{2013}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu II.

1. Giải phương trình: $\cos x + \cos 3x = 1 + \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 1 = 2(x^2 - x + y) \\ y^3 + 1 = 2(y^2 - y + x) \end{cases}$ $(x, y \in R)$

Câu III

1. Cho $a \in \left[-1; \frac{5}{4}\right]$.Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{\sqrt{5-4a} - \sqrt{1+a}}{\sqrt{5-4a} + 2\sqrt{1+a} + 6}$

2. Tìm tất cả các giá trị của *m* để hệ sau có nghiệm thực: $\begin{cases} x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} \ge 5 \\ x^4 + 8x^2 + 16mx + 16m^2 + 32m + 16 = 0 \end{cases}$

Câu IV

1. Cho khai triển: $\left(1 + \sqrt{2}x\right)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \quad (n \in N^*)$.

Tính tổng: A=$a_1 + 2a_2 + ... + n.a_n$. Biết: $\dfrac{2}{C_n^2} + \dfrac{14}{3C_n^3} = \dfrac{1}{n}$

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 4x = 0$ và đường thẳng $d: 2x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho từ điểm M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến (T) với A, B là các tiếp điểm đồng thời đường thẳng AB đi qua điểm $K(-4;-5)$

Câu V

1. Cho tứ diện đều *ABCD* cạnh *a*, hai điểm *M, N* chạy tương ứng trên các đoạn *AB* và *CD* sao cho *BM* = *DN*. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của *MN*.

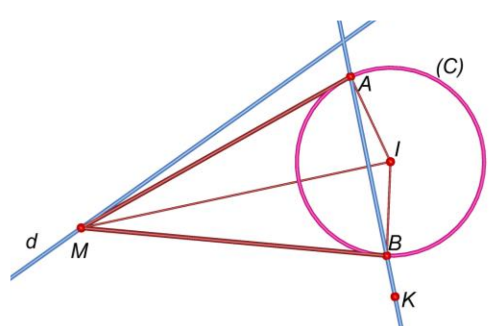
2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+2y+2z+4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-10x-2y-6z+10=0$. Từ điểm M trên (P) kẻ 1 đường thẳng Δ tiếp xúc với (S) tại điểm N. Xác định vị trí của điểm M để độ dài đoạn thẳng MN bằng $\sqrt{11}$

-------------------------**Hết**----------------------------

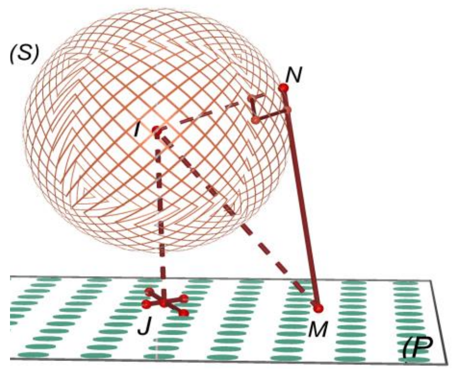
HƯỚNG DẪN ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI TỈNH ĐỀ 02

Câu	Nội dung	Điểm
I **2,0đ**	**2)** Cho hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng d: y = - 2x + m. Chứng minh rằng d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi số thực m. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A và B. Tìm m để P = $(k_1)^{2013}+(k_2)^{2013}$ đạt giá trị nhỏ nhất.	
	Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và d: $\dfrac{2x+3}{x+2}=-2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ 2x^2+(6-m)x+3-2m=0(*) \end{cases}$	0,5
	Xét phương trình (*), ta có: $\Delta>0, \forall m\in R$ và x = -2 không là nghiệm của (*) nên d luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m.	0,5
	Hệ số góc của tiếp tuyến tại A, tại B lần lượt là $k_1=\dfrac{1}{(x_1+1)^2}, k_2=\dfrac{1}{(x_2+1)^2}$, trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (*), ta thấy $k_1.k_2=\dfrac{1}{(x_1+2)^2(x_2+2)^2}=\dfrac{1}{(x_1x_2+2x_1+2x_2+4)^2}=4$ ($k_1>0$, $k_2>0$)	0,5
	Có P = $(k_1)^{2013}+(k_2)^{2013}\geq 2.\sqrt{(k_1k_2)^{2013}}=2^{2014}$, do đó MinP = 2^{2014} đạt được khi $k_1=k_2\Leftrightarrow \dfrac{1}{(x_1+2)^2}=\dfrac{1}{(x_2+2)^2}\Leftrightarrow (x_1+2)^2=(x_2+2)^2$ do x_1, x_2 phân biệt nên ta có $x_1+2=-x_2-2$ $\Leftrightarrow x_1+x_2=-4 \Leftrightarrow$ m = - 2. Vậy m = - 2 là giá trị cần tìm.	0,5
II.1	Giải phương trình: $\cos x+\cos 3x=1+\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$	

2,0đ	$\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x = 1+\sin 2x+\cos 2x$	0, 5
	$\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos x-1) = 1+2\sin x\cos x$ $\Leftrightarrow (\cos^2 x-\sin^2 x)(2\cos x-1) = (\cos x+\sin x)^2$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x+\sin x = 0 & (1) \\ (\cos x-\sin x)(2\cos x-1) = \cos x+\sin x & (2) \end{array}\right.$	0,5
	$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}+k\pi$	0,5
	$(2) \Leftrightarrow 2\cos x(\cos x-\sin x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}+k\pi \\ x+\frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.$ Vậy pt có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$, $x = k2\pi$	0,5
II.2 **2,0đ**	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+1 = 2(x^2-x+y) \\ y^3+1 = 2(y^2-y+x) \end{cases}$ $(x, y \in R)$	
	Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2x^2+2x+1 = 2y \quad (1) \\ y^3-2y^2+2y+1 = 2x \quad (2) \end{cases}$ Xét hàm số $f(t) = t^3-2t^2+2t+1,\ t \in R$. Ta có $f'(t) = 3t^2-4t+2 > 0,\ \forall t \in R$ nên hàm số f(t) đồng biến trên R.	**1**
	Nếu *x>y* thì $2y = f(x) > f(y) = 2x \Rightarrow y > x$, vô lí Tương tự, không thể có *x<y*. Vậy *x=y*	**1**
	Thay *x=y* vào (1) ta được: $x^3-2x^2+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.	**0,5**
	Vậy hệ có ba nghiệm (*x;y*) là: $(1;1);\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right);\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.	**0,5**
III.1 **1,0đ**		
	xét hàm số theo biến *a*: $f(a) = \frac{\sqrt{5-4a}-\sqrt{1+a}}{\sqrt{5-4a}+2\sqrt{1+a}+6}$, $-1 \le a \le \frac{5}{4}$	0,5
	Tính đạo hàm trực tiếp suy ra hàm *f(a)* nghịch biến trên đoạn $\left[-1;\frac{5}{4}\right]$,	1,0
	Vậy $\min P = -\frac{1}{6}$, khi $a = \frac{5}{4}$; Vậy $\max P = \frac{1}{3}$, khi $a = -1$.	0,5
III.2		

<table>
<tr><td rowspan="4">2,0đ</td><td>* Giải BPT: $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2}\ge 5\ (1)$. Với $x\ne -2$, (1) tương đương với
$$\left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}-5\ge 0\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+4.\frac{x^2}{x+2}-5\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x^2}{x+2}\ge 1\\ \frac{x^2}{x+2}\le -5\end{array}\right.$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Từ đó tìm ra $x\ge 2$ hoặc $-2\ne x\le -1$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>* Giả sử x_0 là một nghiệm của PT: $x^4+8x^2+16mx+16m^2+32m+16=0$ (2)
Khi đó PT: $x_0^4+8x_0^2+16mx_0+16m^2+32m+16=0$ phải có nghiệm m
Suy ra PT: $16m^2+16(x_0+2)m+x_0^4+8x_0^2+16=0$ phải có nghiệm m. Do đó
$\Delta'=64(x_0+2)^2-16(x_0^4+8x_0^2+16)\ge 0\Leftrightarrow -16x_0(x_0-2)(x_0^2+2x_0+8)\ge 0\Leftrightarrow 0\le x_0\le 2$
Như vậy nếu (2) có nghiệm thì nghiệm lớn nhất là 2 và nghiệm nhỏ nhất là 0.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Do đó hệ (1), (2) có nghiệm khi PT (2) có nghiệm x=2.
Thay x=2 vào (2) ta được: $m^2+4m+4=0\Leftrightarrow m=-2$
Vậy với $m=-2$ thì hệ (1), (2) có nghiệm.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">IV.1
1,5đ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Giải phương trình: $\frac{2}{C_n^2}+\frac{14}{3C_n^3}=\frac{1}{n}$ ta được: n =9</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Với n = 9 ta có $\left(1+\sqrt{2}x\right)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_9x^9$
Lấy đạo hàm hai vế ta được: $9\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}x\right)^8=a_1+2a_2x+.....+9a_9x^8$</td><td>0, 5</td></tr>
<tr><td>Cho x = 1 ta được A=$a_1+2a_2+.....+9.a_9=9\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^8$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IV.2
2,0đ</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td><u>Cách 1.</u>
Đường tròn (T) có tâm $I(2;0)$ và bán kính $R=2$
Gọi J là trung điểm của MI
Giả sử $M(a;2a+2)\in d$ suy ra: $J\left(\frac{a+2}{2};a+1\right)$ và
$MJ=\frac{\sqrt{5a^2+4a+8}}{2}$ Vì $MA\perp AI, MB\perp BI$ nên A, B
thuộc đường tròn (C) có tâm $J\left(\frac{a+2}{2};a+1\right)$ và

</td><td>0,5</td></tr>
</table>

	bán kính $MJ=\dfrac{\sqrt{5a^2+4a+8}}{2}$	
	Phương trình $(C):\left(x-\dfrac{a+2}{2}\right)^2+(y-a-1)^2=\dfrac{5a^2+4a+8}{4}$. Hay $(C):x^2+y^2-(a+2)x-(2a+2)y+2a=0$	0,5
	Như vậy 2 điểm A,B vừa thuộc đường tròn (T) vừa thuộc đường tròn (C) do đó tọa độ của A,B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x^2+y^2-4x=0\\x^2+y^2-(a+2)x-(2a+2)y+2a=0\end{cases}\Rightarrow(a-2)x+(2a+2)y-2a=0$	0,5
	Do đó A,B thuộc đường thẳng $(a-2)x+(2a+2)y-2a=0$. Hay nói cách khác là đường thẳng AB có phương trình: $(a-2)x+(2a+2)y-2a=0$ Vì đường thẳng AB đi qua điểm $K(-4;-5)$ nên ta có: $(a-2)(-4)+(2a+2)(-5)-2a=0\Leftrightarrow-16a-2=0\Leftrightarrow a=\dfrac{-1}{8}\Rightarrow M\left(\dfrac{-1}{8};\dfrac{7}{4}\right)$	0,5
V.1 **2,0đ**	Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, hai điểm M, N chạy tương ứng trên đoạn AB và đoạn CD sao cho BM = DN. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của MN.	
	+) Đặt $\dfrac{BM}{BA}=x$, với $0\le x\le1\Rightarrow\dfrac{DN}{DC}=x$. Khi đó ta có: $\overrightarrow{BM}=x.\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{DN}=x.\overrightarrow{DC}$	0,5
	+) Ta có: $\overrightarrow{DN}=x.\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BD}=x(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD})\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}=x.\overrightarrow{BC}+(1-x).\overrightarrow{BD}$ Do đó: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BM}=x.\overrightarrow{BC}+(1-x).\overrightarrow{BD}-x.\overrightarrow{BA}$	0,5
	+) $MN^2=x^2a^2+(1-x)^2a^2+x^2a^2+2x(1-x)\dfrac{a^2}{2}-2x^2.\dfrac{a^2}{2}-2x(1-x)\dfrac{a^2}{2}$ $=a^2\left[x^2+(1-x)^2+x^2+x(1-x)-x^2-x(1-x)\right]=(2x^2-2x+1)a^2$	0,25
	+) Xét hàm số $f(x)=2x^2-2x+1$ trên đoạn $[0;1]$ ta có: $\max f(x)=f(0)=f(1)=1,\min f(x)=f(\frac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$	0,25
	+) MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ khi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.	0,25
	+) MN đạt giá trị lớn nhất bằng a khi M≡B, N≡D hoặc M≡A, N≡C.	0,25
	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):x+2y+2z+4=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-10x-2y-6z+10=0$. Từ điểm M trên (P) kẻ 1 đường thẳng Δ tiếp xúc với (S) tại điểm N. Xác định vị trí của điểm M để độ dài đoạn thẳng MN bằng $\sqrt{11}$	

<table>
<tr><td rowspan="4">V.2
2,0đ</td><td>Mặt cầu (S) có tâm $I(5;1;3)$ và bán kính $R=5$
Vì MN là tiếp tuyến của mặt cầu nên $IN \perp NM$

</td><td></td></tr>
<tr><td>Từ đó ta tính được : $IM = \sqrt{IN^2 + NM^2} = \sqrt{5^2 + \left(\sqrt{11}\right)^2} = 6$
Do đó điểm M thuộc mặt cầu (S_1) tâm $I(5;1;3)$ và bán kính $R_1 = 6$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Vậy nên tập hợp các điểm M là đường tròn (C) chính giao tuyến giữa mặt cầu (S_1) và mặt phẳng (P)</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>+)Tâm của (C) là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) và ta dễ dàng xác định được tâm là điểm $J\left(\frac{28}{9};\frac{-25}{9};\frac{-7}{9}\right)$
+) Bán kính của (C) là: $r = \sqrt{R_1^2 - d^2(I,(P))} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{17}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{3}$</td><td>0,5</td></tr>
</table>