

Đề chọn học sinh giỏi có đáp án môn: Toán - Lớp 12 (Năm học 2015-2016)

Câu I.

Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) (C)

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
- Chứng minh rằng $d: y = -2x + m$ cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi số thực m. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A và B. Tìm m để $P = (k_1)^{2013} + (k_2)^{2013}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu II.

1. Giải phương trình: $\cos x + \cos 3x = 1 + \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 1 = 2(x^2 - x + y) \\ y^3 + 1 = 2(y^2 - y + x) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Câu III

1. Cho $a \in \left[-1; \frac{5}{4}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{\sqrt{5-4a} - \sqrt{1+a}}{\sqrt{5-4a} + 2\sqrt{1+a} + 6}$

2. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ sau có nghiệm thực: $\begin{cases} x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} \geq 5 \\ x^4 + 8x^2 + 16mx + 16m^2 + 32m + 16 = 0 \end{cases}$

Câu IV

1. Cho khai triển: $(1 + \sqrt{2}x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

Tính tổng: $A = a_1 + 2a_2 + \dots + n.a_n$. Biết: $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n}$

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn (T): $x^2 + y^2 - 4x = 0$ và đường thẳng $d: 2x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho từ điểm M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến (T) với A, B là các tiếp điểm đồng thời đường thẳng AB đi qua điểm $K(-4; -5)$

Câu V

1. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a , hai điểm M, N chạy tương ứng trên các đoạn AB và CD sao cho $BM = DN$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của MN .
2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 2y - 6z + 10 = 0$. Từ điểm M trên (P) kẻ 1 đường thẳng Δ tiếp xúc với (S) tại điểm N . Xác định vị trí của điểm M để độ dài đoạn thẳng MN bằng $\sqrt{11}$

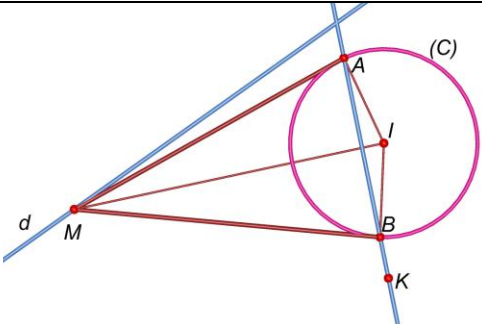
-----Hết-----

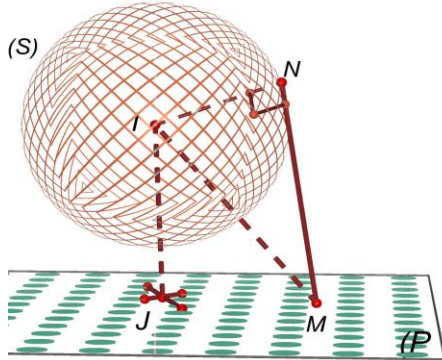
HƯỚNG DẪN ĐỀ ÔN THI HỌC SINH GIỎI TỈNH ĐỀ 02

Câu	Nội dung	Điểm
I 2,0đ	2) Cho hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng d: $y = -2x + m$. Chứng minh rằng d cắt (C) tại hai điểm A, B phân biệt với mọi số thực m. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A và B. Tìm m để $P = (k_1)^{2013} + (k_2)^{2013}$ đạt giá trị nhỏ nhất.	
	Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và d: $\frac{2x+3}{x+2} = -2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m = 0(*) \end{cases}$	0,5
	Xét phương trình (*), ta có: $\Delta > 0, \forall m \in R$ và $x = -2$ không là nghiệm của (*) nên d luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m.	0,5
	Hệ số góc của tiếp tuyến tại A, tại B lần lượt là $k_1 = \frac{1}{(x_1+1)^2}, k_2 = \frac{1}{(x_2+1)^2}$, trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (*), ta thấy $k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{(x_1+2)^2(x_2+2)^2} = \frac{1}{(x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4)^2} = 4 \quad (k_1 > 0, k_2 > 0)$	0,5
	Có $P = (k_1)^{2013} + (k_2)^{2013} \geq 2 \cdot \sqrt{(k_1k_2)^{2013}} = 2^{2014}$, do đó $\text{Min}P = 2^{2014}$ đạt được khi $k_1 = k_2 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_1+2)^2} = \frac{1}{(x_2+2)^2} \Leftrightarrow (x_1+2)^2 = (x_2+2)^2$ do x_1, x_2 phân biệt nên ta có $x_1 + 2 = -x_2 - 2$ $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4 \Leftrightarrow m = -2$. Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.	0,5

II.1 2,0đ	Giải phương trình: $\cos x + \cos 3x = 1 + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$	
	$\Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x = 1 + \sin 2x + \cos 2x$	0,5
	$\Leftrightarrow \cos 2x(2 \cos x - 1) = 1 + 2 \sin x \cos x$ $\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(2 \cos x - 1) = (\cos x + \sin x)^2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = 0 & (1) \\ (\cos x - \sin x)(2 \cos x - 1) = \cos x + \sin x & (2) \end{cases}$	0,5
	(1) $\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	0,5
	(2) $\Leftrightarrow 2 \cos x(\cos x - \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$ Vậy pt có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k2\pi$	0,5
II.2 2,0đ	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 1 = 2(x^2 - x + y) \\ y^3 + 1 = 2(y^2 - y + x) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$	
	Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 2y & (1) \\ y^3 - 2y^2 + 2y + 1 = 2x & (2) \end{cases}$ Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + 2t + 1, t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên \mathbb{R} .	1
	Nếu $x > y$ thì $2y = f(x) > f(y) = 2x \Rightarrow y > x$, vô lí Tương tự, không thể có $x < y$. Vậy $x = y$	1
	Thay $x = y$ vào (1) ta được: $x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.	0,5
	Vậy hệ có ba nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 1); \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$.	0,5
III.1 1,0đ	xét hàm số theo biến $a: f(a) = \frac{\sqrt{5 - 4a} - \sqrt{1 + a}}{\sqrt{5 - 4a} + 2\sqrt{1 + a} + 6}, -1 \leq a \leq \frac{5}{4}$	0,5
	Tính đạo hàm trực tiếp suy ra hàm $f(a)$ nghịch biến trên đoạn $\left[-1; \frac{5}{4}\right]$,	1,0
	Vậy $\min P = -\frac{1}{6}$, khi $a = \frac{5}{4}$; Vậy $\max P = \frac{1}{3}$, khi $a = -1$.	0,5

<p>III.2</p>		
<p>2,0đ</p>	<p>* Giải BPT: $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} \geq 5$ (1). Với $x \neq -2$, (1) tương đương với</p> $\left(x - \frac{2x}{x+2}\right)^2 + \frac{4x^2}{x+2} - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{x^2}{x+2} - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x+2} \geq 1 \\ \frac{x^2}{x+2} \leq -5 \end{cases}$	<p>0,5</p>
	<p>Từ đó tìm ra $x \geq 2$ hoặc $-2 \neq x \leq -1$.</p>	<p>0,5</p>
	<p>* Giả sử x_0 là một nghiệm của PT: $x^4 + 8x^2 + 16mx + 16m^2 + 32m + 16 = 0$ (2)</p> <p>Khi đó PT: $x_0^4 + 8x_0^2 + 16mx_0 + 16m^2 + 32m + 16 = 0$ phải có nghiệm m</p> <p>Suy ra PT: $16m^2 + 16(x_0 + 2)m + x_0^4 + 8x_0^2 + 16 = 0$ phải có nghiệm m. Do đó</p> $\Delta' = 64(x_0 + 2)^2 - 16(x_0^4 + 8x_0^2 + 16) \geq 0 \Leftrightarrow -16x_0(x_0 - 2)(x_0^2 + 2x_0 + 8) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x_0 \leq 2$ <p>Như vậy nếu (2) có nghiệm thì nghiệm lớn nhất là 2 và nghiệm nhỏ nhất là 0.</p>	<p>0,5</p>
	<p>Do đó hệ (1), (2) có nghiệm khi PT (2) có nghiệm $x=2$.</p> <p>Thay $x=2$ vào (2) ta được: $m^2 + 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2$</p> <p>Vậy với $m = -2$ thì hệ (1), (2) có nghiệm.</p>	<p>0,5</p>
<p>IV.1</p>		
<p>1,5đ</p>	<p>Giải phương trình: $\frac{2}{C_n^2} + \frac{14}{3C_n^3} = \frac{1}{n}$ ta được: $n=9$</p>	<p>0,5</p>
	<p>Với $n = 9$ ta có $(1 + \sqrt{2}x)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_9x^9$</p> <p>Lấy đạo hàm hai vế ta được: $9\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}x)^8 = a_1 + 2a_2x + \dots + 9a_9x^8$</p>	<p>0,5</p>
	<p>Cho $x = 1$ ta được $A = a_1 + 2a_2 + \dots + 9a_9 = 9\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^8$.</p>	<p>0,5</p>
<p>IV.2</p>		
<p>2,0đ</p>	<p><u>Cách 1.</u></p> <p>Đường tròn (T) có tâm $I(2;0)$ và bán kính $R = 2$</p> <p>Gọi J là trung điểm của MI</p> <p>Giả sử $M(a;2a+2) \in d$ suy ra: $J\left(\frac{a+2}{2}; a+1\right)$ và</p> $MJ = \frac{\sqrt{5a^2 + 4a + 8}}{2}$ <p>Vì $MA \perp AI, MB \perp BI$ nên A, B</p>	<p>0,5</p>

<p>thuộc đường tròn (C) có tâm $J\left(\frac{a+2}{2}; a+1\right)$ và bán kính $MJ = \frac{\sqrt{5a^2+4a+8}}{2}$</p> 	
<p>Phương trình (C): $\left(x - \frac{a+2}{2}\right)^2 + (y - a - 1)^2 = \frac{5a^2 + 4a + 8}{4}$. Hay (C): $x^2 + y^2 - (a+2)x - (2a+2)y + 2a = 0$</p>	0,5
<p>Như vậy 2 điểm A, B vừa thuộc đường tròn (T) vừa thuộc đường tròn (C) do đó tọa độ của A, B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ x^2 + y^2 - (a+2)x - (2a+2)y + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow (a-2)x + (2a+2)y - 2a = 0$</p>	0,5
<p>Do đó A, B thuộc đường thẳng $(a-2)x + (2a+2)y - 2a = 0$. Hay nói cách khác là đường thẳng AB có phương trình: $(a-2)x + (2a+2)y - 2a = 0$ Vì đường thẳng AB đi qua điểm $K(-4; -5)$ nên ta có: $(a-2)(-4) + (2a+2)(-5) - 2a = 0 \Leftrightarrow -16a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{8} \Rightarrow M\left(\frac{-1}{8}; \frac{7}{4}\right)$</p>	0,5
<p>V.1 2,0đ Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, hai điểm M, N chạy tương ứng trên đoạn AB và đoạn CD sao cho $BM = DN$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của MN.</p>	
<p>+) Đặt $\frac{BM}{BA} = x$, với $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{DN}{DC} = x$. Khi đó ta có: $\overrightarrow{BM} = x \cdot \overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{DN} = x \cdot \overrightarrow{DC}$</p>	0,5
<p>+) Ta có: $\overrightarrow{DN} = x \cdot \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BD} = x(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = x \cdot \overrightarrow{BC} + (1-x) \cdot \overrightarrow{BD}$ Do đó: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = x \cdot \overrightarrow{BC} + (1-x) \cdot \overrightarrow{BD} - x \cdot \overrightarrow{BA}$</p>	0,5
<p>+) $MN^2 = x^2 a^2 + (1-x)^2 a^2 + x^2 a^2 + 2x(1-x) \frac{a^2}{2} - 2x^2 \cdot \frac{a^2}{2} - 2x(1-x) \frac{a^2}{2}$ $= a^2 [x^2 + (1-x)^2 + x^2 + x(1-x) - x^2 - x(1-x)] = (2x^2 - 2x + 1)a^2$</p>	0,25
<p>+) Xét hàm số $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ trên đoạn $[0; 1]$ ta có: $\max f(x) = f(0) = f(1) = 1, \min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$</p>	0,25
<p>+) MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ khi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.</p>	0,25

	+) MN đạt giá trị lớn nhất bằng a khi $M \equiv B, N \equiv D$ hoặc $M \equiv A, N \equiv C$.	0,25
V.2 2,0đ	<p>Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 2y - 6z + 10 = 0$. Từ điểm M trên (P) kẻ 1 đường thẳng Δ tiếp xúc với (S) tại điểm N. Xác định vị trí của điểm M để độ dài đoạn thẳng MN bằng $\sqrt{11}$</p> <p>Mặt cầu (S) có tâm $I(5;1;3)$ và bán kính $R = 5$ Vì MN là tiếp tuyến của mặt cầu nên $IN \perp NM$</p> 	
	Từ đó ta tính được : $IM = \sqrt{IN^2 + NM^2} = \sqrt{5^2 + (\sqrt{11})^2} = 6$ Do đó điểm M thuộc mặt cầu (S_1) tâm $I(5;1;3)$ và bán kính $R_1 = 6$	0,5
	Vậy nên tập hợp các điểm M là đường tròn (C) chính giao tuyến giữa mặt cầu (S_1) và mặt phẳng (P)	0,5
	+) Tâm của (C) là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P) và ta dễ dàng xác định được tâm là điểm $J\left(\frac{28}{9}; \frac{-25}{9}; \frac{-7}{9}\right)$	0,5
	+) Bán kính của (C) là: $r = \sqrt{R_1^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{17}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{3}$	