BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO — **ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2010**

Môn: TOÁN; Khối: A

ĐỀ CHÍNH THỨC — *Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề*

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH *(7,0 điểm)*

Câu I ***(2,0 điểm)***

Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ (1), m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thoả mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

Câu II ***(2,0 điểm)***

1. Giải phương trình $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

2. Giải bất phương trình $\dfrac{(x-\sqrt{x})^2}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}} \geq 1.$

≥ 1

$1 - 2(x^2 - x + 1)$

Câu III ***(1,0 điểm)*** Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}\,dx$.

Câu IV ***(1,0 điểm)*** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN với DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Câu V ***(1,0 điểm)*** Giải hệ phương trình $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

II. PHẦN RIÊNG *(3,0 điểm)*

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a ***(2,0 điểm)***

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng d_1: $\sqrt{3}x + y = 0$ và d_2: $\sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.
2. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x - 2y + z = 0$. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến (P), biết $MC = \sqrt{6}$.

Câu VII.a ***(1,0 điểm)*** Tìm phần ảo của số phức z, biết $\bar{z} = (\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}\,i)$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b ***(2,0 điểm)***

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6; 6)$; đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x + y - 4 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh B và C, biết điểm $E(1; -3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.
2. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 0; -2)$ và đường thẳng Δ: $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC = 8$.

Câu VII.b ***(1,0 điểm)*** Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z} = \dfrac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\bar{z} + iz$.

----------- **Hết** ----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..; Số báo danh.............................

ĐÁP ÁN ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC 2010

MÔN TOÁN – KHỐI A

I – PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I: $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$

1) Bạn đọc tự giải.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và Ox

$$x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \quad (2) \\ g(x) = x^2 - x - m = 0 \quad (3) \end{array}\right.$$

Gọi x_1 là nghiệm pt (2) và x_2, x_3 là nghiệm pt (3).

Yê u cầu bài toán : $\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4m > 0 \\ m \neq 0 \\ 1 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{-1}{4} \\ m \neq 0 \\ 1 + 1 + 2m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{4} < m \neq 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Câu II

1) $\dfrac{(1 + \sin x + \cos 2x)\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$. Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases}$

$$\text{pt} \Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+\cos 2x)(\sin x+\cos x)}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x(1+\sin x+\cos 2x)(\sin x+\cos x)}{\cos x+\sin x}=\cos x$$

$$\Leftrightarrow 1+\sin x+\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x+\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow 2(1-\sin^2 x)+\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}>1 \ \ (\text{loại}) \\ \sin x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \ \ \ (\text{thoả đk}) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right)+k2\pi \\ x=\pi-\arcsin\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\right)+k2\pi \end{array}\right. (k\in Z).$$

2) $$\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}}\ge 1$$

Ta có: $2(x^2-x+1)=2\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right]\ge\dfrac{3}{2}\Rightarrow 1-\sqrt{2(x^2-x+1)}<0$

bpt $\Leftrightarrow x-\sqrt{x}\le 1-\sqrt{2(x^2-x+1)} \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2-x+1)}\le\sqrt{x}+(1-x)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\left[(1-x)^2+\left(\sqrt{x}\right)^2\right]} \le \sqrt{x}+(1-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+(1-x)\ge 0 \\ \left((1-x)-\sqrt{x}\right)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+1-x\ge 0 \\ 1-x=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

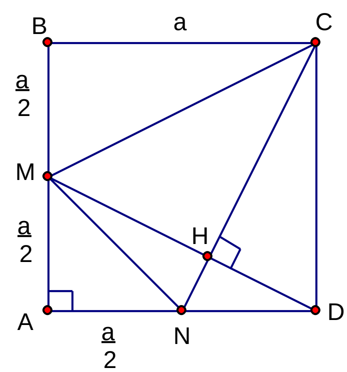
Câu III

$$I=\int_0^1 \frac{x^2+e^x+2x^2e^x}{1+2e^x}dx=\int_0^1 \frac{x^2\left(1+2e^x\right)+e^x}{1+2e^x}dx=\int_0^1\left(x^2+\frac{e^x}{1+2e^x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{1}{2}\ln\left|1+2e^x\right|\Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2e}{3}\right)$$

$$\text{Vậy } I=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2e}{3}\right)$$

Câu IV



+ Ta có: SH ⊥ (ABCD) → $V_{S.CMND}=\frac{1}{3}SH.S_{CMND}$

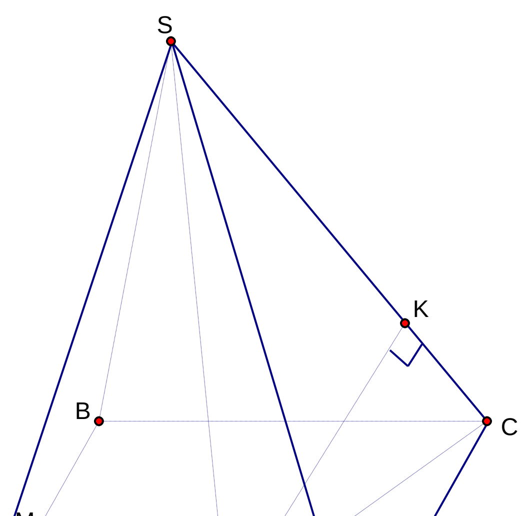
$$S_{CMND}=S_{ABCD}-S_{CBM}-S_{AMD}=a^2-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{8}=\frac{5a^2}{8}$$

$$\Rightarrow V_{S.CMND}=\frac{1}{3}\cdot a\sqrt{3}\cdot\frac{5a^2}{8}=\frac{a^3 5\sqrt{3}}{24} \text{ (đvtt)}$$

+ Ta có : ΔCDN = ΔDAM

$$\Rightarrow \begin{cases} CN\perp DM \\ SH\perp DM \end{cases} \Rightarrow DM\perp(SCN) \Rightarrow DM\perp SC$$

Kẻ HK ⊥ SC → HK ⊥ MD → HK = d(DM, SC)



$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HC^2}$$

với $\begin{cases} SH=a\sqrt{3} \\ CN.CH=CD^2 \end{cases} \to CH^2=\frac{CD^4}{CN^2}=\frac{a^4}{\frac{5a^2}{4}}=\frac{4a^2}{5}$

$$\Rightarrow \frac{1}{HK^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{5}{4a^2}=\frac{19}{12a^2}\Rightarrow HK=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

Câu V

$$\begin{cases} (4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x^2+1)x=(3-y)\sqrt{5-2y} \quad (1) \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 \quad (2) \end{cases}$$

+ Điều kiện: $\begin{cases} x\le \frac{3}{4} \\ y\le \frac{5}{2} \end{cases}$

$$(1)\Rightarrow \begin{cases} VT_{(1)}=4x^3+x\le \frac{39}{16} \\ VP_{(1)}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} VP_{(1)}=(3-y)\sqrt{5-2y}\le \frac{39}{16}\Rightarrow y\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} 0\le x\le \frac{3}{4} \\ 0\le y\le \frac{5}{2} \end{cases}$

+ Xét $f_1(x)=(4x^2+1)x$ tăng trên $\left[0\,;\,\frac{3}{4}\right]$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

$g_1(y)=(3-y)\sqrt{5-2y}$ giảm trên $\left[0\,;\,\frac{5}{2}\right]$, $g(2)=1$

+ $f_2(x)=4x^2+2\sqrt{3-4x}$ giảm trên $\left[0\,;\,\frac{3}{4}\right]$

$g_2(y)=y^2$ tăng trên $\left[0\,;\,\frac{5}{2}\right]$

+ Với $0\le x\le\frac{1}{2}$: $(1)\Rightarrow g_1(y)=f_1(x)<1\Rightarrow y>2$

$$\Rightarrow\begin{cases}f_2(x)>f_2\left(\frac{1}{2}\right)=3\\ g_2(y)>g_2(2)=4\end{cases}\Rightarrow VT_{(2)}>VP_{(2)}$$

+ Với $\frac{1}{2}<x\le\frac{3}{4}$: $(1)\Rightarrow g_1(y)=f_1(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)=g(2)\to y<2$

$$\Rightarrow\begin{cases}f_2(x)<f_2\left(\frac{1}{2}\right)=3\\ g_2(y)<g(2)=4\end{cases}\Rightarrow VT_{(2)}<VP_{(2)}$$

+ $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2.$

Vậy nghiệm: $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=2\end{cases}$

II – PHẦN RIÊNG

A. THEO CHƯƠNG TRÌNH CHUẨN

Câu VIa

1) $(d_1):\sqrt{3}x+y=0$; $(d_2):\sqrt{3}x-y=0$.

+ $d_1\cap d_2=0(0;0)$

+ $\cos(d_1;d_2)=\frac{\left|\sqrt{3}.\sqrt{3}-1\right|}{2.2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \hat{A}OC=60^0$ (ΔAOC vuông tại A).

$\Rightarrow AC = 2R$; $AB = R$; $BC = R\sqrt{3}$; $OA = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

Theo gt: $S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{AB.BC}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow R = 1 \Rightarrow OA = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Mà $A \in (d_1) \Rightarrow A\left(a; -\sqrt{3}a\right) \Rightarrow OA^2 = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow a^2 + 3a^2 = \dfrac{4}{3} \Leftrightarrow 4a^2 = \dfrac{4}{3}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (a > 0).

$+ \ (d_3): \begin{cases} \text{qua } A\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}; -1\right) \\ (d_3) \perp (d_1) \end{cases} \Rightarrow (d_3): x - \sqrt{3}y - \dfrac{4}{\sqrt{3}} = 0.$

$+ \ T\left(t; \dfrac{\sqrt{3}t - 4}{3}\right) \in d_3$

$+ \ OT^2 = OA^2 + AT^2 = \dfrac{7}{3} \Leftrightarrow t^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}t - 4}{3}\right)^2 = \dfrac{7}{3}$

$\Leftrightarrow 12t^2 - 8\sqrt{3}t - 5 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{5\sqrt{3}}{6} \\ t_2 = \dfrac{-\sqrt{3}}{6} \end{array}\right.$

Vậy $(T_1): \left(x - \dfrac{5\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 1$ và $(T_2): \left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(y + \dfrac{3}{2}\right)^2 = 1$

2) $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$; $(P): x - 2y + z = 0$

Phương trình tham số: $\Delta:\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \qquad (t\in \mathbb{R}) \\ z=-2-t \end{cases}$

+ Vì $C=\Delta\cap(P)$. Tọa độ điểm C thỏa hệ: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=-2-t \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \\ x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$

$$\Rightarrow C(-1;-1;-1)$$

+ $M(1+2t;t;-2-t)\in\Delta$, $MC^2=6 \Leftrightarrow (2t+2)^2+(t+1)^2+(-t-1)^2=6$

$$\Leftrightarrow 6t^2+12t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\rightarrow M_1(1;0;-2) \\ t=-2\rightarrow M_2(-3;-2;0) \end{array}\right.$$

+ $d(M_1,(P))=\dfrac{|1-0-2|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}=d(M_2,(P))$. Vậy $d(M,(P))=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Câu VIIa

Tìm phần thực, ảo của z:

$\bar{z}=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$

$=\left(2+2\sqrt{2}i+i^2\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)$

$=\left(1+2\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)$

$=1-\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i-4i^2=5+\sqrt{2}i$

$\Rightarrow z=5-\sqrt{2}i$

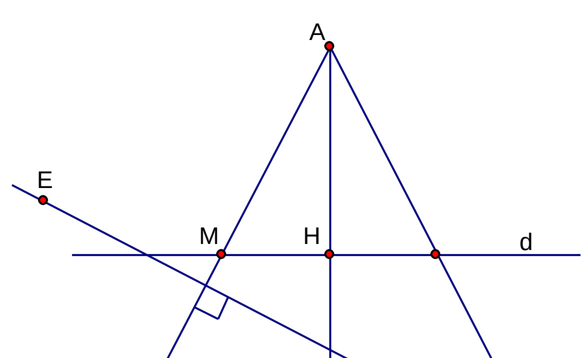
Phần thực của z là a = 5; phần ảo của z là $b=-\sqrt{2}$.

B. THEO CHƯƠNG TRÌNH NÂNG CAO

Câu VIb

1) Đặt $d: x+y-4=0$

+ $A\in\Delta\perp d\Rightarrow\Delta: x-y=0$



+ Gọi $H = \Delta \cap d \Rightarrow H(2;2)$

+ Gọi I là trung điểm BC

suy ra H là trung điểm IA → I(-2; -2)

+ Đường thẳng (BC) qua I và song song d

→ (BC): x + y + 4 = 0.

+ $B, C \in BC \Rightarrow \begin{cases} B(b;-b-4) \\ C(c;-c-4) \end{cases}$

+ $\overrightarrow{AB} = (b-6;-b-10)$; $\overrightarrow{EC} = (c-1;-c-1)$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC} = 0 \\ \text{I là trung điểm BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-6)(c-1)+(b+10)(c+1) = 0 \\ b+c = -4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} bc+2c+8=0 \\ b+c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=-6 \end{cases} \vee \begin{cases} c=-4 \\ b=0 \end{cases}$

$\Rightarrow B(-6;2); C(2;-6)$ hay $B(0;-4); C(-4;0)$.

2) $A(0;0;-2)$, $\Delta: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{2}$

+ (d) qua M(-2;2;-3), vtcp: $\vec{a} = (2;3;2)$

+ $\overrightarrow{MA} = (2;-2;1)$

+ $\left[\vec{a};\overrightarrow{MA}\right] = (7;2;-10) \Rightarrow \left|\left[\vec{a};\overrightarrow{MA}\right]\right| = \sqrt{49+4+100} = \sqrt{153}$

+ $|\vec{a}| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$

$$d(A,\Delta) = \frac{\left|\left[\vec{a};\overrightarrow{MA}\right]\right|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}} = 3.$$

Mà $R^2 = d^2(A,\Delta) + \dfrac{BC^2}{4} = 9+16 = 25$

Suy ra mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$

Câu VIIb

Ta có

$$\bar{z}=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}=\frac{1-3\sqrt{3}i+3.3.i^2-3i^3}{1-i}=\frac{\left(-8-3\sqrt{3}i+3i\right)\left(1+i\right)}{2}$$

$$=\frac{-8-8i-3\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i^2+3i+3i^2}{2}=\frac{-11+3\sqrt{3}-5i-3\sqrt{3}i}{2}$$

$$\Rightarrow a=\frac{-11+3\sqrt{3}}{2}\ ;\ b=\frac{5+3\sqrt{3}}{2}$$

Ta có: $\left|\bar{z}+iz\right|=\left|a-bi+i\left(a+bi\right)\right|=\left|a-b+\left(a-b\right)i\right|$

$$=\sqrt{\left(\frac{-11+3\sqrt{3}}{2}-\frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-11+3\sqrt{3}}{2}-\frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$$