ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Môn thi : TOÁN

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I (2,0 điểm). Cho hàm số $y \quad \frac{x\ \ 1}{2x\ \ 1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng y = x + m luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu II (2,0 điểm).

1. Giải phương trình $\frac{1\ \ \sin 2x\ \ \cos 2x}{1\ \ \cot^2 x}\quad \sqrt{2}\sin x \sin 2x$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2y\ \ 4xy^2\ \ 3y^3\ \ 2(x\ \ y)\ \ 0 \\ xy(x^2\ \ y^2)\ \ 2\ \ (x\ \ y)^2 \end{cases}$ (x, y R).

Câu III (1,0 điểm). Tính tích phân I = $\int_0^{\overline{4}} \frac{x\sin x\ \ (x\ \ 1)\cos x}{x\sin x\ \ \cos x}dx$

Câu IV (1,0 điểm). Cho hình chóp S. ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB=BC=2a; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S. BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Câu V (1,0 điểm) Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn [1; 4] và x y, x z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\frac{x}{2x\ \ 3y}\ \ \frac{y}{y\ \ z}\ \ \frac{z}{z\ \ x}$.

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng : x + y + 2 = 0 và đường tròn (C): $x^2 + y^2 – 4x – 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc . Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết tứ giác MAIB có diện tích bằng 10.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A (2; 0; 1), B (0; -2; 3) và mặt phẳng (P): 2x – y – z + 4 = 0. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MA = MB = 3.

Câu VII.a (1,0 điểm) Tìm tất cả các số phức z, biết $z^2 = |z|^2\ \ \bar{z}$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E) : $\frac{x^2}{4}\ \ \frac{y^2}{1}$ 1. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E), có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm A (4; 4; 0). Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Câu VII.b (1,0 điểm) Tính môđun của số phức z, biết:

$$(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i.$$

BÀI GIẢI

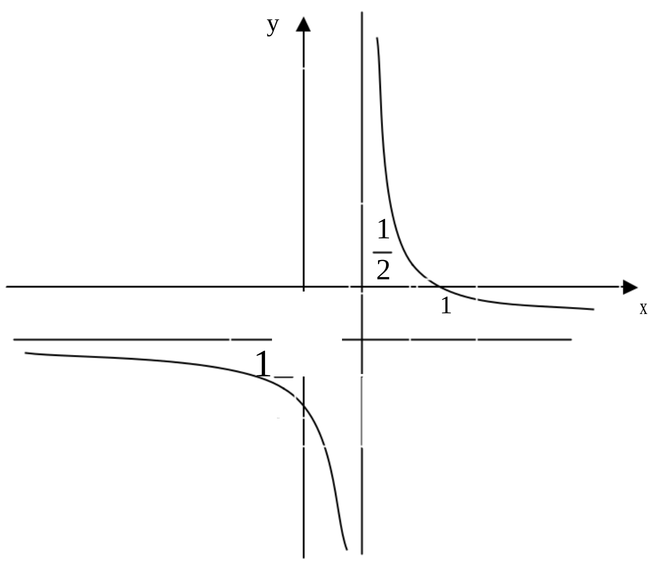
PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I. 1. $D \setminus \frac{1}{2}$; $y' \quad \frac{1}{(2x \;\; 1)^2} \quad 0, \; x \;\; D$

TCĐ: x= $\frac{1}{2}$ vì $\lim_{x \;\; \frac{1}{2}} y$, $\lim_{x \;\; \frac{1}{2}} y$; TCN: y = $\frac{1}{2}$ vì $\lim_{x} y \quad \frac{1}{2}$

Hàm số nghịch biến trên (; $\frac{1}{2}$) và ($\frac{1}{2}$; +). Hàm số không có cực trị.

X	-∞		$\frac{1}{2}$		+∞
y'			||		
Y	$-\frac{1}{2}$ ↘	-∞	||	+∞ ↘	$-\frac{1}{2}$



2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d : y = x +m

$\frac{x \;\; 1}{2x \;\; 1} \quad x \;\; m$ (2x – 1) (x + m) = -x + 1 (Vì x = $\frac{1}{2}$ không là nghiệm)

$2x^2 + 2mx – (m + 1) = 0$ (1)

Phương trình (1) có $\quad m^2 \;\; 2m \;\; 2 \quad (m \;\; 1)^2 \;\; 1 \quad 0, \; m \quad R$

Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm nên d luôn cắt (C) tại hai điểm A, B.

Hoành độ tiếp điểm tại A, B là x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1)

$x_1 + x_2 = - m$ và $x_1.x_2 = \frac{m \;\; 1}{2}$

Ta có: $k_1 \quad k_2 \quad \frac{1}{(2x_1 \;\; 1)^2} \quad \frac{1}{(2x_2 \;\; 1)^2} = \frac{4(x_1^2 \;\; x_2^2) \;\; 4(x_1 \;\; x_2) \;\; 2}{4x_1x_2 \; 2(x_1 \;\; x_2) \;\; 1}$

$= (4m^2 \;\; 8m \;\; 6) \quad 4(m \;\; 1)^2 \;\; 2$

$k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất bằng -2 $\quad$ m = -1.

Câu II:

1. $\frac{1 \ \sin 2x \ \ \cos 2x}{1 \ \cot^2 x} \quad \sqrt{2}.\sin x.\ s\ in 2x$

$\sin^2 x\,(1 \ \sin 2x \ \cos 2x\,) \ 2\sqrt{2} \sin^2 x \cos x$ (ĐK : $\sin x \neq 0$)

$1 \ \sin 2x \ \cos 2x \ 2\sqrt{2} \cos x$

$2 \cos^2 x \ 2 \sin x \cos x \ 2\sqrt{2} \cos x \ 0 \ 2$

$\cos x\,(\cos x \ \sin x \ \sqrt{2})\ 0$

$\cos x = 0$ hay $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$

$\cos x = 0$ hay $\sin \ x \quad \overline{4} \quad 1$

$x = \ \overline{2} \ k$ hay $x = \ \overline{4} \quad k\,2 \ (k \ Z)$

2.

$5x \quad y \ 4xy^2\ 3y^3 \quad 2(x \ y) \ 0 \ (1)$

$xy\,(x^2 \quad y^2) \ 2 \ (x \ y)^2 \qquad (2)$

$(2)\ xy\,(x^2 \quad y^2) \ 2 \ x^2 \quad y^2 \quad 2xy$

$(x^2\ y^2)(xy\ 1)\ 2(xy\ 1)\ 0\ (xy$

$1)(x^2\ y^2\ 2)\ 0$

$xy \ 1$

$x^2 \quad y^2 \quad 2$

TH1: $5x \ y \ 4xy^2\ 3y^3\ 2(x \ y) \ 0$

$xy \ 1$

$x \ 1 \quad v \quad x \ 1$

$y \ 1 \qquad y \ 1$

TH2 : $5x \quad y \ 4xy^2\ 3y^3\ 2(x \ y) \ 0$

$x^2 \quad y^2 \quad 2$

$5x \quad y \ 4xy^2\ 3y^3(x^2\ y^2)(x \ y) \ 0$

$x^2 \quad y^2 \quad 2$

$y \ x \qquad v \quad y \ \frac{1}{2} \ x$

$x^2 \quad y^2 \quad 2$

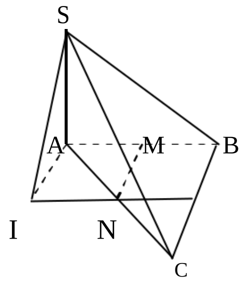
$x \ 1 \quad v \quad x \ 1 \qquad x \ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \qquad x \ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$y \ 1 \qquad y \ 1 \qquad y \ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \qquad y \ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

Câu III : $\int_0^{4} \frac{x \sin x \ \ (x \ \ 1)\cos x}{x \sin x \ \ \cos x} dx \ \int_0^{4} \frac{x \sin x \ \ \cos x}{x \sin x \ \ \cos x} \ \ \frac{x \cos x}{x \sin x \ \ \cos x}\, dx$

$= \frac{}{4} \int_0 1 \frac{x \sin x \;\; \cos x}{x \sin x \;\; \cos x} dx \;\; x \;\; \ln \left| x \sin x \;\; \cos x \right|_0^{\frac{}{4}} \;\; \frac{}{4} \ln(\;\; \frac{\sqrt{2}}{8} \;\; \frac{\sqrt{2}}{2} \;\;)$

Câu IV



Ta có : $SBA = 60^0$ và SBA là ½ tam giác đều

nên SA = $\frac{4a\sqrt{3}}{2} \;\; 2a \;\; \sqrt{3}$

$V_{(SMNCB)} = \frac{1}{3} \frac{a}{2} \;\; (a \;\; 2a) \;\; 2a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$

Kẻ NI // AB để có AMNI là hình vuông, vậy khoảng cách của AB đến SN chính là đường cao SAI, gọi h là chiều cao đó, ta có:

$\frac{1}{h^2} \;\; \frac{1}{(2a\sqrt{3})^2} \;\; \frac{1}{a^2}$ h = $\frac{a\sqrt{12}}{\sqrt{13}}$

Câu V. P = $\frac{x}{2x \;\; 3y} \;\; \frac{y}{y \;\; z} \;\; \frac{z}{z \;\; x}$

Lấy đạo hàm theo z ta có : P' (z) = 0 $\frac{y}{(y \;\; z)^2} \;\; \frac{x}{(z \;\; x)^2} = \frac{(x \;\; y)(z^2 \;\; xy)}{(y \;\; z)^2 \; (z \;\; x)^2}$

+ Nếu x = y thì P = $\frac{6}{5}$

+ Ta xét x > y thì P P($\sqrt{xy}$) = $\frac{x}{2x \;\; 3y} \;\; \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{y} \;\; \sqrt{x}}$

Khảo sát hàm P theo z, ta có P nhỏ nhất khi z = $\sqrt{xy}$

Đặt t = $\sqrt{\frac{x}{y}}$ P thành f(t) = $\frac{t^2}{2t^2 \;\; 3} \;\; \frac{2}{1 \;\; t}$ (t (1; 2])

f'(t) = $\frac{2[4t^3(t \;\; 1) \;\; 3(2t^2 \;\; t \;\; 3)]}{(2t^2 \;\; 3)^2 \; (t \;\; 1)^2}$ < 0

Vậy P f(t) f(2) = $\frac{34}{33}$. Dấu "=" xảy ra khi x = 4, y = 1, z = 2

Vậy min P = $\frac{34}{33}$.

Câu VI.a.

1. Diện tích MAI=5 = $\frac{1}{2}AM.\sqrt{5}$ $AM \;\; 2\sqrt{5}$ và $MI^2 = IA^2 + AM^2 = 25 \;\; 2$

M M(m; -m – 2). Vậy $MI \;\; (2 \;\; m; m \;\; 3)$ nên ta có phương trình:

$4 \;\; m^2 \;\; 4m \;\; m^2 \;\; 6m \;\; 9 \;\; 25$ $m^2 + m - 6 = 0$ m = 2 hay m = -3

M (2; -4) và M (-3; 1).

2. Pt mp (Q) trung trực đoạn AB qua trung điểm I (1;-1;2) của AB có VTPT IA=(1;1;-1) là : x + y – z + 2 = 0

Giao tuyến d của (P) và (Q) qua J (0; 1; 3) có VTCP a = (2; 1; 3)

pt d : $\begin{cases} x \;\; 2t \\ y \;\; 1 \;\; t \\ z \;\; 3 \;\; 3t \end{cases}$

MA = MB, M (P) M d M (2t; 1 + t; 3 + 3t)

MA = 3 $(2-2t)^2 + (-1-t)^2 + (-2-3t)^2 = 9$

$t = 0$ hay $t = \frac{3}{7}$. Vậy M (0; 1; 3) hay M $\left(\frac{6}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7}\right)$

Câu VII.a. Giả sử z = a + bi (a, b R)

z^2 $z^2 \quad z \quad (a\ ib)^2 \quad a^2 \quad ib \quad a\ 2abi \quad a^2 \quad b^2 \quad a \quad bi \quad b^2 \quad a^2 \quad b^2$

$| \; |$ $\bar{\ }$

$a^2 \quad b^2 \quad a \quad a^2 \quad b^2 \qquad a \quad 2b^2$

$b \quad 2ab \qquad b \quad 0 \; v \; a \quad \frac{1}{2}$

$a \quad 0 \qquad 4b^2 \quad 1$

$b \quad 0 \qquad a \quad \frac{1}{2}$

$a \quad 0 \qquad a \quad \frac{1}{2} \qquad a \quad \frac{1}{2}$

$b \quad 0 \qquad b \quad \frac{1}{2} \qquad b \quad \frac{1}{2}$

Vậy có 3 số phức thỏa ĐK là :

$z \quad 0, \; z \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}i, \quad z \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}i$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b 1. Do x_A, $x_B > 0$ và OAB cân tại O nên A, B đối xứng nhau qua Ox và $x_A = x_B > 0$, $y_B = - y_A$

Do A (E) nên $\frac{x_A^2}{4} \quad \frac{y_A^2}{1} \quad 1$

S $_{OAB}$ = $\frac{1}{2} AB.d(O, AB) \; \frac{1}{2} 2|y_A|.|x_A| \quad |x_A y_A|$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có : 1 = $\frac{x_A^2}{4} \quad \frac{y_A^2}{1} \quad 2\sqrt{\frac{x_A^2}{4}.y_A^2} \quad |x_A y_A| \quad S_{OAB}$

S lớn nhất khi và chỉ khi : $\frac{x_A^2}{4} \quad \frac{1}{2} \qquad x_A \quad \sqrt{2}$

$y_A^2 \quad \frac{1}{2} \qquad y_A \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy : A $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; B $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ hay A $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; B $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Cách khác :

Gọi OH là đường cao ta có $OH \quad x_A, x_A \quad 0 \quad v \quad AH \quad |y_A| \quad S_{OAB} \quad x_A . \quad |y_A$

Mà ta có :

$A(\;2; \; \frac{\bar{2}}{2}), \quad B(\;\bar{2}; \; \frac{\bar{2}}{2}) \quad S_{OAB} \quad \frac{1}{2}.2.|y_A| \; .\overline{4 \quad 4y_A^2} \quad \frac{4y_A^2\,4 \quad 4y_A^2}{4} \quad 1$

$\frac{\sqrt{}}{2}$ $\sqrt{2}$

$A(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}),\ B(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$ hoặc $B(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}),\ A(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$x_B^2 \quad y_B^2 \; z_B^2 \; 4x_B \quad 4y_B \quad 4z_B \quad 0$$

2. B (S) và OAB đều nên $OA^2 \quad OB^2$

$$OA^2 \quad AB^2$$

$x_B^2 \quad y_B^2 \quad z_B^2 \quad 4(x_B \quad y_B \quad z_B)\; x_B \quad y_B \quad z_B \quad 8$

$32 \; x_B^2 \quad y_B^2 \quad z_B^2 \qquad\qquad x_B^2 \; y_B^2 \quad z_B^2 \; 32$

$32 \; (4 \; x_B)^2 \quad (4 \; y_B)^2 \quad z_B^2 \qquad x_B^2 \; y_B^2 \quad z_B^2 \; 8(x_B \; y_B) \; 0$

$x_B \quad y_B \quad z_B \quad 8 \qquad z_B \quad 4$

$x_B^2 \quad y_B^2 \; z_B^2 \quad 32 \qquad (x_B \quad y_B)^2 \quad 2x_B y_B \quad z_B^2 \quad 32$

$x_B \quad y_B \; 4 \qquad x_B \quad y_B \quad 4$

$x_B \quad 0 \qquad x_B \quad 4$

$y_B \quad 4$ hay $y_B \quad 0$

$z_B \quad 4 \qquad z_B \quad 4$

Trường hợp 1: $OA \;(4; 4; 0)$; $OB \;(0; 4; 4)$ $\qquad OA, OB\,(16; 16;16)$

Pt (OAB) : x – y + z = 0

Trường hợp 2: $OA \;(4;4;0)$; $OB \;(4;0;4)$ $\qquad OA, OB\,(16; 16; 16)$

Pt (OAB) : x – y – z = 0

Câu VII.b Giả sử z = x + yi x, y R

Ta có : (2z – 1)(1 + i) + ($\bar{z}$ +1)(1 – i) = 2 – 2i 2(1 + iz) + (1 – i) $\bar{z}$ = 2

2(1 + i)(x + yi) + (1 – i)(x – yi) = 2

3x – 3y + (x + y)i = 2 $\qquad \begin{matrix} 3x \;\; 3y \;\; 2 \\ x \;\; y \;\; 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x & \frac{1}{3} \\ y & \frac{1}{3} \end{matrix} \qquad |z| \; \sqrt{\frac{1}{9} \; \frac{1}{9}} \quad \frac{\sqrt{2}}{3}$

Trần Văn Toàn
(Trường THPT Vĩnh Viễn – TP.HCM)