GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH CAO HỌC

MÔN CƠ BẢN: ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Bài 1:

Cho ánh xạ tuyến tính f : $R^4 \rightarrow R^3$ xác định bởi

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+x_4)$ với mọi $x=(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4$

$M=\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 : x_1-x_2=0$ và $x_3-x_4=0\}$

a. Tìm ma trận f trong cơ sở chính tắc của R^4 và R^3 . xác định Imf và Kerf

b. CM f(M) là không gian vectơ con của R^3. tìm dimf(M)

Giải :

- Tìm ma trận f trong cơ sở chính tắc của R^4 và R^3

Trong R^4 ta có $e_1=(1,0,0,0),e_2=(0,1,0,0),e_3=(0,0,1,0),e_4=(0,0,0,1)$

Trong R^3 ta có $e'_1=(1,0,0),e'_2=(0,1,0),e'_3=(0,0,1)$

Ma trận f trong cơ sở chính tắc là

$$A_{f/(e^4),(e^3)} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mà $f(e_1)=(1,0,0)=a_1e'_1+b_1e'_2+c_1e'_3$ ta tìm được $(a_1,b_1,c_1)=(1,0,0)$

$f(e_2)=(1,1,0)$ $(a_2,b_2,c_2)=(1,1,0)$

$f(e_3)=(0,1,1)$ $(a_3,b_3,c_3)=(0,1,1)$

$f(e_4)=(0,0,1)$ $(a_4,b_4,c_4)=(0,0,1)$

- Xác định Imf,Kerf
- Kerf $=\{ x \in R^4 : f(x)=0 \}$

Ta được hệ $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_3+x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_4 \\ x_2=x_4 \\ x_3=-x_4 \\ x_4 \in R \end{cases}$ hệ có nghiệm tổng quát là (-a,a,-a,a)

Hệ nghiệm cơ bản là (-1,1,-1,1)

Vậy dimKerf=1, cơ sở của Kerf =(-1,1,-1,1)

- Tìm Imf

Ta có $f(e_1)=(1,0,0),f(e_2)=(1,1,0), f(e_3)=(0,1,1),f(e_4)=(0,0,1)$

Nên $Imf=\langle f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4)\rangle$

Ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vậy cơ sở của Imf là $f(e_1),f(e_2),f(e_3)$ và dimf=3

b.

Bài 2:

Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

<u>Giải</u> : lập ma trận các hệ số

$$A = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & . & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & m & 1 & . & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & . & 1. \\ m & 1 & 1 & 1 & . & 1 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & m & 1 & . & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1-m & . & 1-m \end{bmatrix}$$

vậy ta được $\begin{cases} (1-m)(2+m)x_3 + (1-m)x_4 = 1-m \\ (m-1)x_2 + (1-m)x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

Biện luận:

Với m=1 hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 3 tham số x_2,x_3,x_4

nghiệm của hệ là (1-a-b-c,a,b,c) a,b,c $\in$R

với m=-2 hệ có vô số nghiệm phụ thuộc tham số x_3

nghiệm của hệ là (a,a,a,1) a $\in$R

với m khác 1,-2 hệ có vô số nghiệm phụ thuộc tham số x_4 và m nghiệm của hệ là $\begin{cases} x = \dfrac{1-a}{m+2} \\ x = \dfrac{1-a}{m+2} \\ x = \dfrac{1-a}{m+2} \\ x = a \end{cases}$ a $\in$R

Bài 3:

Cho chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x+2)^n}{n.2^n}$$

a. Tìm miền hội tụ của chuỗi

b. Tính tổng của chuỗi

Giải:

a. ta có $U_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(x+2)^n}{n.2^n}$

tính $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{x+2}{2} = C$

theo tiêu chuẩn côsi nếu chuỗi hội tụ khi C<1 tức là

$\dfrac{x+2}{2} < 1 \Leftrightarrow -4 < x < 0$

tại x+2=2 và x+2=-2 ta có chuỗi

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(\pm 2)^n}{n.2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(-1)^n 1^n}{-n} = 0$ hội tụ

vậy MHT là [-4;0]

b.

Bài 4:

Cho a>0 và $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^a}, x^2+y^2 > 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad , \mathrm{x} = \mathrm{y} = 0 \end{cases}$

Tuỳ theo giá trị của a>0 xét sự khả vi của f tại (0,0), sự liên tục của f'_x, f'_y tại (0,0)

Giải : Tính các đhr

- tại $x^2+y^2>0$

$$f_x^{'} = 2x\sin\frac{1}{(x^2+y^2)^a} - \frac{2x^3}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^a}$$

$$f_y^{'} = \frac{-2x^2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{(x^2+y^2)^a}$$

- tại x=y=0

$$f_x^{'} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} =$$

$$f_y^{'} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} =$$

- xét sự khả vi của f tại (0,0) Cần xét : $\lim\limits_{s,t\to 0}\varphi(s,t)$

Với $\varphi(s,t) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}\left[f(s,t) - f(0,0) - f_x^{'}(0,0)s - f_y^{'}(0,0)t\right]$

Nếu $\lim\limits_{s,t\to 0}\varphi(s,t)$=0 thì hàm số khả vi tại (0,0) ngược lại thì không khả vi

- xét sự liên tục của f'_x,f'_y tại 0(0,0)

nếu : $\lim\limits_{x,y\to 0} f_x^{'}(x,y) \neq f_x^{'}(0,0)$, $\lim\limits_{x,y\to 0} f_y^{'}(x,y) \neq f_y^{'}(0,0)$ thì hàm số không liên tục tại (0,0)

ngược lại thì liên tục

Bài 5:

Cho (X,d) là không gian Metric A $\subset$X khác rỗng

Cho f: X $\to$R định bởi f(x)=d(x;A)=inf{d(x,y): y$\in$A}

a. CM: f liên tục điều trên X

b. Giả sử A là tập đóng , B là tập compác chứa trong X và A $\cap$ B =ϕ

Đặt d(A,B)= inf{ d(x,y),x $\in$A,y $\in$B }

CM : d(A,B)>0

<u>Giải :</u>

a. để CM f liên tục điều trên X cần CM $\left|f(x) - f(x')\right| \le d(x,x')$

ta có d(x,y)$\le$ d(x,x')+d(x',y) lấy inf 2 vế $\Rightarrow$d(x,A)-d(x',A) $\le$ d(x,x')

tương tự thay đổi vai trò vị trí của x và x' nhau ta suy ra ĐPCM

vậy f liên tục tại x', do x' tuỳ ý nên f liên tục điều trên X

b. Giả sử trái lại d(A,B)=0

Khi đó ta tìm được các dãy $(x_n) \subset A$, $(y_n) \subset B$ sao cho $\lim d(x_n,y_n)=0$

Do B compắc nên (y_n) có dãy con $(y_{n_k})_k$ hội tụ ve $y_0 \in B$

Ta có $d(x_{n_k}, y_0) \le d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y_0)$

Mà $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} d(y_{n_k}, y_0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y_0) = 0$

Do A là tập đóng dãy $(x_{n_k})_k \subset A$, $(x_{n_k})_k \to y_0$ nên $y_0 \in A$

Điều này mâu thuẩn với giả thiết $A \cap B = \phi$. Vậy $d(A,B)>0$

GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH CAO HỌC THÁNG 9/2007

MÔN CƠ BẢN: ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Bài 1: Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n (x-2)^{2n}$$

Giải : Đặt $X=(x-2)^2$ đk $X \ge 0$

Ta tìm miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n X^n$ xét $u_n = \frac{n+1}{2n+3}$

Ta có $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow R = \frac{1}{l} = 2$ nên khoảng hội tụ là (-2,2)

Xét tại X= 2, X= -2

Ta có chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n 2^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \left(\frac{2n+2}{2n+3}\right)^n$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+3} = 1 \ne 0$ nên chuỗi phân kì

vậy miền hội tụ theo X là (-2,2)

$\Rightarrow$ miền họi tụ theo x là $|x-2| < \sqrt{2} \Leftrightarrow 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$

Bài 2: Cho hàm số $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{khi } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{khi } x=y=0 \end{cases}$

Chứng tỏ rằng hàm số f(x,y)có đạo hàm riêng f'_x, f'_y không liên tục tại 0(0,0)

Nhưng hàm số f(x,y)khả vi tại 0(0,0).

Giải :

Tính các đhr tại (x,y)$\neq$(0,0) va tại (x,y)=(0,0)

- Tại (x,y)$\neq$(0,0)

Ta có $$f_x^{'} = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$f_y^{'} = 2y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

- Tại (x,y)=(0,0)

$$f_x^{'} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{t^2}}{t} \le \lim_{t\to 0} t = 0 \quad \text{do} \left|\sin\frac{1}{t^2}\right| \le 1$$

$$f_y^{'} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{t^2}}{t} \le \lim_{t\to 0} t = 0 \quad \text{do} \left|\sin\frac{1}{t^2}\right| \le 1$$

CM : f'$_x$,f'$_y$ không liên tục tại 0(0,0) Ta CM : $\lim\limits_{x,y\to 0} f_x^{'} \neq 0$ và $\lim\limits_{x,y\to 0} f_y^{'} \neq 0$

Hay CM : $\lim\limits_{x,y\to 0} f_x^{'}(x,y) \neq f_x^{'}(0,0)$, $\lim\limits_{x,y\to 0} f_y^{'}(x,y) \neq f_y^{'}(0,0)$

Ta có :

$$\lim_{x,y\to 0} f_x^{'}(x,y) = \lim_{x,y\to 0} 2x.\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \lim_{x,y\to 0}\frac{2x}{x^2+y^2}.\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

Do $\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le 1, \Rightarrow \left|2x\sin\frac{1}{x+y}\right| \le |2x| \to 0,\ \text{khi } x\to 0$

$$\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le 1 \Rightarrow \left|\frac{2x}{x^2+y^2}.\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|2x|}{x^2+y^2} \le \frac{2}{|x|} \to \infty,\quad \text{khi}\quad x\to 0$$

nên $\lim\limits_{x,y\to 0} f_x^{'}(x,y) \neq f_x^{'}(0,0)$

tương tự ta CM : được $\lim\limits_{x,y\to 0} f_y^{'}(x,y) \neq f_y^{'}(0,0)$

vậy f'$_x$,f'$_y$ không liên tục tại 0(0,0)

- Ta CM : f(x,y)khả vi tại 0(0,0). Cần CM : $\lim\limits_{s,t\to 0}\varphi(s,t) = 0$

Với $\varphi(s,t) = \dfrac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}\left[f(s,t) - f(0,0) - f_x^{'}(0,0)s - f_y^{'}(0,0)t\right]$

$$\lim_{s,t\to 0}\varphi(s,t)=\lim_{s,t\to 0}\sqrt{s^2+t^2}.\sin\frac{1}{s^2+t^2}=0 \quad (\text{do } \sin\left|\frac{1}{s^2+t^2}\right|\le 1)$$

vậy f(x,y)khả vi tại 0(0,0)

Bài 3: Cho $\varphi:[0,1]*R\to R$ là một hàm số liên tục

CMR : Hàm F: $C_{[0,1]}\to R$ xác định bởi

$F(x)=\int_0^1\varphi(t,x(t))dt$ khi x(t)$\in C_{[0,1]}$ là hàm số liên tục trên $C_{[0,1]}$

Giải: Cố định x_0, CM f liên tục tại x_0

Đặt M=1+sup$|x_0(t)|$, t$\in C_{[0,1]}$

Cho $\varepsilon>0$

φ liên tục trên tập compac D= [0,1]*[-M,M] nên φ liên tục đều trên D

tồn tại số δ_1>0 sao cho

$\forall(t,s),(t',s')\in D\Rightarrow|t-t'|<\delta_1,|s-s'|<\delta_1\Rightarrow|\varphi(t,s)-\varphi(t',s')|<\varepsilon$

đặt $\delta=\min(1,\delta_1):\forall x\in[0,1]\Rightarrow d(x,x_0)<\delta$

mà $|x(t)-x_0(t)|<1\Rightarrow x_0(t)\in[-M,M]$

$$|\varphi(t,x(t))-\varphi(t,x_0(t))|<\varepsilon\Rightarrow\left|\int_0^1[\varphi(t,x(t))-\varphi(t,x_0(t))]dt\right|<\varepsilon\Rightarrow|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon$$

ta CM được $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:d(x,x_0)<\delta\Rightarrow d(F(x),F(x_0))<\varepsilon$

vậy F liên tục tại x_0

Bài 4: Cho ánh xạ tuyến tính $f:R^4\to R^3$ xác định bởi

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-2x_2+x_4,-x_1+x_2+2x_3,-x_2+2x_3+x_4)$

1. Tìm cơ sở và số chiều của kerf, Imf
2. f có phải là đơn cấu , toàn cấu không?

Giải : 1.

- Tìm cơ sở và số chiều của kerf

Với x=(x_1,x_2,x_3,x_4)

Ta có : $\ker f=\{x\in R^4:f(x)=0\}$

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-2x_2+x_4,-x_1+x_2+2x_3,-x_2+2x_3+x_4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+x_4=0 \\ -x_1+x_2+2x_3=0 \\ -x_2+2x_3+x_4=0 \end{cases}$

lập ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

vậy Rank(A)=2

ta có $\begin{cases} x_1=2x_2-x_4 \\ x_2=2x_3+x_4 \\ x_3,x_4 \in R \end{cases}$ nên dimKerf=2

nghiệm cơ bản là (1,1,0,1),(4,2,1,0) và là cơ sở của Kerf

do dimKerf =2 $\neq$ 0 nên f không đơn cấu

- Tìm cơ sở , số chiều của Im f

Im f là không gian con của R^3 sinh bởi hệ 4 vectơ

$f(e_1)=(1,-1,0)$ với $e_1=(1,0,0,0)$

$f(e_2)=(-2,1,-1)$ với $e_2=(0,1,0,0)$

$f(e_3)=(0,2,2)$ với $e_3=(0,0,1,0)$

$f(e_4)=(1,0,1)$ với $e_4=(0,0,0,1)$

ta tìm hạng của 4 vectơ trên

xét ma trận $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Rank(B)=2, , dim Imf =2 , cơ sở của Imf là $f(e_1),f(e_2)$

Do , dim Imf =2 nên f không toàn cấu

<u>Bài 5:</u> Cho $f:V\to V', g:V\to V''$ là những ánh xạ tuyến tính sao cho $\ker f \subset \ker g$ Hơn nữaf là một toàn cấu . CMR tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $h:V'\to V''$ sao cho h.f=g

<u>Giải:</u>

Bài 6: Cho dạng toàn phương trên R^3

f(x_1,x_2,x_3)= $2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+ax_1x_3$

a. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange

b. Với giá trị nào của a thì f xác định dương, không âm

Giải : a. f(x_1,x_2,x_3)= $2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+ax_1x_3$=……

$$\ldots\ldots=2\left[x_1+\frac{2x_2+ax_3}{4}\right]^2+\frac{3}{2}\left(x_2-\frac{a}{6}x_3\right)^2+\left(1-\frac{a^2}{6}\right)x_3^2$$

đặt $\begin{cases} y_1=x_1+\dfrac{x_2}{2}+\dfrac{ax_3}{4} \\ y_2=x_2-\dfrac{ax_3}{6} \\ y_3=x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=y_1-\dfrac{y_2}{2}-\dfrac{ay_3}{3} \\ x_2=y_2+\dfrac{ay_3}{6} \\ x_3=y_3 \end{cases}$

ta được cơ sở f chính tắc là u_1=(1,0,0),u_2=(-1/2,1,0),u_3=(-a/3,a/6,1)

ma trận trong cơ sở chính tắc là $T_{\varepsilon u}=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-1}{2} & \dfrac{-a}{3} \\ 0 & 1 & \dfrac{a}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. f xác định dương khi $1-\dfrac{a^2}{6}>0 \Leftrightarrow -\sqrt{6}<a<\sqrt{6}$

f xác định không âm khi $1-\dfrac{a^2}{6}=0 \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{6}$

GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH CAO HỌC THÁNG 5/2007

MÔN CƠ BẢN: ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Bài 1: Cho u=u(x,y), v=v(x,y) là hàm ẩn suy ra từ hệ phương trình

$$\begin{cases} x.e^{u+v}+2uv-1=0 \\ y.e^{u-v}-\dfrac{u}{1+v}-2x=0 \end{cases}$$

tìm vi phân d_u(1,2), d_v(1,2) biết u(x,y)=0, v(x,y)=0

Giải : lí thuyết : cho hàm ẩn $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ xác định bởi u=u(x,y), v=v(x,y)

Tính các đạo hàm riêng của hàm ẩn

Từ hệ trên ta có $\begin{cases} F_x' d_x + F_y' d_y + F_u' d_u + F_v' d_v = 0 \\ G_x' d_x + G_y' d_y + G_u' d_u + G_v' d_v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -F_x' d_x - F_y' d_y = F_u' d_u + F_v' d_v \\ -G_x' d_x - G_y' d_y = G_u' d_u + G_v' d_v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_u = \\ d_v = \end{cases}$

Tính $\begin{cases} d_u(1,2) = \\ d_v(1,2) = \end{cases}$

Ta có :

<u>Bài 2:</u> Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}(x+1)^n$$

<u>Giải :</u> Đặt X= x+1 ta được $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} X^n$

Xét $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}$

Ta có : $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(\ln n)^2}{(n+1)[\ln(n+1)]^2}$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{[\ln(n+1)]^2} \overset{lopitan}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2.\ln n.\frac{1}{n}}{2.\ln(n+1).\frac{1}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)}$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \overset{lopitan}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$

Nên $R = \frac{1}{L} = 1$, khoảng hội tụ là (-1,1)

Tại X=± 1 ta được chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}(\pm 1)^n$

Từ đó ta có $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(\ln n)^2}{(n+1)[\ln(n+1)]^2} = 1 \neq \infty$

Chuỗi phân kì , MHT theo X là (-1,1)

MHT theo x là (-2,0)

<u>Bài 3:</u> Cho X là không gian metric compac f: X$\to$X thoả d(f(x),f(y))<d(x,y) với x$\neq$ y

a. CM tồn tại duy nhất $x_0 \in X$ sao cho $f(x_0)=x_0$

b. Đặt $A_1=f(X), A_{n+1}=f(A_n)$, $n \in N$ và $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

CM: $A \neq \phi$ và $f(A)=A$

<u>Giải :</u> a. CM tồn tại duy nhất $x_0 \in X$ sao cho $f(x_0)=x_0$

Đặt $g(x)= d(x,f(x))$, $g: X \to R$,$x \in X$

- Ta CM g liên tục

Ta co $|g(x)-g'(x)| = |d(x,f(x))-d(x',f(x'))| < d(x,x')+d(f(x),f(x')) = 2d(x,x')$

Mà lim d(x,x')=0 nên g liên tục

Do X là tập compac nên tồn tại x_0 sao cho $g(x_0)=\min(g(x))$

Để CM $f(x_0)=x_0$ ta đi CM $g(x_0)=d(x_0,f(x_0))=0$

Ta CM bằng phản chứng

Giả sử $g(x_0)=d(x_0,f(x_0))>0$

Khi đó $g(f(x_0))=d(f(x_0),f(f(x_0)))< d(x_0,f(x_0))=g(x_0)$

Điều này mâu thuẩn với sự kiện $g(x_0)=\min(g(x))$

Vậy $g(x_0)=d(x_0,f(x_0))=0$ hay $x_0=f(x_0)$

CM tính duy nhất của x_0.

Giả sử có $y_0 \in X$ sao cho $y_0=f(x_0)$

Khi đó $d(x_0,y_0) =d(f(x_0),f(y_0))<d(x_0,y_0)$ nếu $x_0 \neq y_0$

Điều này vô lí vậy x_0 tồn tại và duy nhất

b. Đặt $A_1=f(X), A_{n+1}=f(An)$, $n \in N$ và $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

CM: $A \neq \phi$ và $f(A)=A$

- CM: $A \neq \phi$

Do f liên tục ,X compac nên $A_1= f(X)$ là tập compac

Giả sử An là tập compackhi đó $A_{n+1}=f(A_n)$ là tập compac

Vậy A_n là tập compac khác rỗng $\forall n \in N^*$ nên A_n la tập đóng

Hơn nủa do $A_1=f(X) \subset X$ nên $A_2=f(A_1) \subset f(X)=A_1$

Giả sử $A_{n+1} \subset A_n$ ta có $A_{n+2}=f(A_{n+1}) \subset f(A_n)=A_{n+1}$

Vậy $A_{n+1} \subset A_n, \forall n \in N$

$\{A_n\}$ là họ có tâm các tập đóng trong không gian compac

Theo tính chất phần giao hữu hạn ta có A=$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi$

- CM: f(A)=A cần CM : f(A)$\subset$A (1) , f(A)$\supset$A (2)
- CM : f(A)$\subset$A (1)

Do A $\subset$ A_n nên f(A) $\subset$ f(A_n)=A_{n+1} với mọi n, là dãy giảm nên

f(A) $\subset$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n+1} = A$

- f(A)$\supset$A (2)

lấy tuỳ ý x$\in$ A cần CM x $\in$ f(A)

vì x $\in$ A_{n+1} =f(A_n) với mọi n=1,2 … tồn tại $x_n \in A_n$: x=f(x_n)

do X compact nên có dãy con $(x_{nk})_k$: $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a$

khi đó $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = x$, do f liên tục nên $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(a)$ ta cần CM a $\in$ A

cố đinh n ta có $x_{n_k} \in A_{n_k} \subset A_n \Rightarrow x_{n_k} \in A_n$ khi $n_k \geq$ n

do A_n đóng $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in A_n$

vậy a $\in A_n$ với mọi n=1,2 …

do a $\in$ A, x=f(a) $\in$f(A)

vậy ta CM được f(A)=A

<u>Bài 4:</u> Giải và biện luận hệ $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

<u>Giải :</u> Ta có ma trận mở rộng

$A = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & . & 1 \end{bmatrix}$ đổi chỗ d_1, d_3, biến đổi ma trận về dạng

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & m & 1 & . & 1\\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & . & 0\\ 0 & 0 & (m-1)(m+2) & m-1 & . & m-1\end{bmatrix}$$

biện luận

- nếu m=1 hệ có VSN phụ thuộc 3 tham số x_2,x_3,x_4 và RankA=1

nghiệm của hệ là x_1=1-a-b-c, x_2=a,x_3=b,x_4=c

- nếu m=-2 hệ có VSN phụ thuộc tham số x_3 và RankA=3

nghiệm của hệ là x_1=x_2=x_3=a,x_4=1

- nếu m $\neq$ 1và m $\neq$ -2 thì hệ có VSN phụ thuộc vào tham số x_4 va tham số m

nghiệm của hệ là $x_1=\dfrac{1-a}{m+2}, x_2=\dfrac{1-a}{m+2}, x_3=\dfrac{1-a}{m+2}, x_4=a, a\in R$

<u>Bài 5:</u> Trong R^3 cho cơ sở :

u_1=(1,1,1), u_2= (-1,2,1), u_3=(1,3,2)

cho ánh xạ tuyến tính f: $R^3\to R^3$ xác định bởi

f(u_1)= (0,5,3), f(u_2)=(2,4,3), f(u_3)=(0,3,2)

tìm ma trận của f trong cơ sở đó là ma trận chéo hoá được

<u>Giải :</u> b1. Tìm ma trận của f trong cơ sở u

Ta có hệ $\begin{cases} f(u_1)=a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3 & (1)\\ f(u_2)=b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3 & (2)\\ f(u_3)=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3 & (3)\end{cases}$

Từ (1) ta có (0,5,3)=a_1(1,1,1)+a_2(-1,2,1)+a_3(1,3,2)$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1-a_2+a_3=0\\ a_1+2a_2+3a_3=0\\ a_1+a_2+2a_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=0\\ a_2=1\\ a_3=1\end{cases}$

Tương tự từ (2) ta được b_1=1,b_2=0,b_3=1

Tương tự từ (3) ta được c_1=1,c_2=1,c_3=0

Vậy ma trận A trong cơ sở f là $A_{A/f(u)}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

B2. Tìm GTR- VTR của A và của f (GTR của A chính là GTR của f)

Xét ma trận đặt trưng $\begin{bmatrix}-m & 1 & 1\\ 1 & -m & 1\\ 1 & 1 & -m\end{bmatrix}=-m^3+3m+2=0\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}m=-1(kep)\\ m=2\end{matrix}\right.$

A có 2 giá trị riêng, nên f có 2 giá trị riêng m=-1, m=2

Tìm VTR của A từ đó suy ra VTR của f

- với m=-1 ta có $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

VTR của A có dạng $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2, x_3 \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 = -a - b \\ x_2 = a \\ x_3 = b \end{cases}$ a,b∈R

Dạng VTR của A là (-a-b,a,b)

Vậy A có 2 VTR (-1,0,1),(-1,1,0)

Từ đó VTR của f có dạng n= $x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=(-a-b)u_1+au_2+bu_3=$

=(-a-b)(1,1,1)+a(-1,2,1)+b(1,3,2)=(-2a,a+2b,b)

vậy f có 2 VTR ĐLTT với a=1,b=0 : VTR là n_1=(-2,1,0)

với a=0,b=1: VTR là n_2=(0,2,1)

- với m=2 ta có $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$

VTR của A có dạng $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_3 \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 = -a + 2a = a \\ x_2 = x_3 = a \\ x_3 = a \end{cases}$ a∈R

Dạng VTR của A là (a,a,a),

Vậy A có VTR (1,1,1)

Từ đó VTR của f có dạng n= $x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=au_1+au_2+au_3=$

=a(1,1,1)+a(-1,2,1)+a(1,3,2)=(a,6a,4a)

vậy f có VTR là n_3=(1,6,4)

b3 : KL vậy f có 3 VTR ĐLTT n_1,n_2,n_3 do đó 3 VTR n_1,n_2,n_3 làm thành 1 cơ sở của R^3 và ma trận của f trong cơ sở đó là ma trận chéo hoá được

ta có :

$$A_{f/(n)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH CAO HỌC THÁNG 9/2006

MÔN CƠ BẢN: ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Bài 1: Cho $f(x,y)=\begin{cases} x+y^2\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ,\ x^2+y^2>0 \\ 0 & ,\ x=y=0 \end{cases}$

a. Xét sự khả vi của f tại (x,y)$\in R^2$ đặc biệt tại (0,0)

b. Xét sự liên tục của các ĐHR $f_x^{'}, f_y^{'}$ tại (0,0)

Giải :

- Tại (x,y)$\neq$(0,0) Ta có

$$f_x^{'}=1-\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}.\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$f_y^{'}=2y.\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2}.\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

Do $f_x^{'}, f_y^{'}$ liên tục tại mọi (x,y)$\neq$(0,0) nên f khả vi tại mọi (x,y)$\neq$(0,0)

- Tại (x,y)=(0,0)

Ta có

$$f_x^{'}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=1$$

$$f_y^{'}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}t^2.\frac{\sin\frac{1}{t^2}}{t}=0 \qquad (\text{do}\left|\sin\frac{1}{t^2}\right|\leq 1)$$

- Tính $\lim\limits_{s,t\to 0}\varphi(s,t)$

Ta có $\varphi(s,t)=\dfrac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}\left[f(s,t)-f(0,0)-f_x^{'}(0,0)s-f_y^{'}(0,0)t\right]=\dfrac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}.t^2.\sin\dfrac{1}{t^2+s^2}$

$$\lim_{s,t\to 0}\varphi(s,t)=\lim_{s,t\to 0}\frac{t^2}{\sqrt{s^2+t^2}}.\sin\frac{1}{s^2+t^2}=0$$

do $\left|\sin\dfrac{1}{s^2+t^2}\right|\leq 1$ nên f khả vi tại (0,0)

b.Xét sự liên tục của các ĐHR $f_x^{'}, f_y^{'}$ tại (0,0)

để Xét sự liên tục của các ĐHR $f_x^{'}, f_y^{'}$ tại (0,0) ta tính $\lim\limits_{x,y\to 0}f_x^{'}(x,y), \lim\limits_{x,y\to 0}f_y^{'}(x,y)$

nếu $\lim\limits_{x,y\to 0} f_x'(x,y)=f_x'(0,0), \lim\limits_{x,y\to 0} f_y'(x,y)=f_y'(0,0)$ thì f_x', f_y' liên tục tại (0,0)

f_x', f_y' không liên tục tại (0,0)

chọn $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},0\right)\to(0,0)$ ta có $\lim\limits_{x,y\to 0} f_x'(\frac{1}{n},0)=1$, $\lim\limits_{x,y\to 0} f_y'(\frac{1}{n},0)=0$

chọn $(x'_n,y'_n)=\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}},\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right)\to(0,0)$ ta có $\lim\limits_{x,y\to 0} f_x'(x_n',y_n')=-\infty$, $\lim\limits_{x,y\to 0} f_y'(x_n',y_n')=-\infty$

vậy f_x', f_y' không liên tục tại (0,0)

<u>Bài 2:</u> Cho (X,d)là không gian mêtric compac, f: X$\to$X thoả mãn:

d(f(x),f(y))<d(x,y) nếu x$\neq$y

a. CM có duy nhất $x_0\in$ X sao cho $f(x_0)=x_0$
b. Đặt g_n: X $\to$R định bởi

$g_n(x)=d(x_0,f^n(x))$, $x\in X$ trong đó $f^n=f_0f_{00}f$ (n lần)

CM g_n liên tục thoả mãn $g_n(x)\geq g_n(x)\geq ....\geq g_n(x)......, \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=0, \forall x\in X$

c. CM $(g_n)_n$ hội tụ điều về 0 trên X

<u>Giải :</u>

a.CM có duy nhất $x_0\in$ X sao cho $f(x_0)=x_0$

đặt h: X $\to$R xác định bởi h(x)=d(x,f(x)), $x\in X$

ta CM h liên tục

xét $|h(x)-h(x')|=|d(x,f(x))-d(x',f(x'))|\leq 2d(x,x')$

vậy h liên tục

h(x) liên tục , X compac nên tồn tại x_0 : $h(x_0)$= min(h(x)) với $x\in$ X

cần CM $h(x_0)=0$ ta CM bằng phản chứng

giả sử $h(x_0)=d(x_0,f(x_0))>0$

khi đó $h(f(x_0))=d(f(x_0),f(f(x_0)))<d(x_0,f(x_0))=h(x_0)$

điều này mâu thuẩn với sự kiện tồn tại x_0 : $h(x_0)$= min(h(x)) với $x\in$ X

vậy $h(x_0)$ =0 hay $x_0=f(x_0)$

ta CM tính duy nhất

giả sử có $y_0 \in X$: $y_0=f(x_0)$ với x_0 khác y_0

ta có $d(x_0,y_0)=d(f(x_0),f(y_0))<d(x_0,y_0)$ điều này vô lí

vậy x_0 tồn tại duy nhất

b. Đặt g_n: X $\to$R định bởi

$g_n(x)=d(x_0,f^n(x))$, $x\in X$ trong đó $f^n=f_0f_{00}f$ (n lần)

CM g_n liên tục thoả mãn $g_n(x)\ge g_n(x)\ge ....\ge g_n(x)......, \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=0, \forall x\in X$

Ta có $|g_n(x)-g_n(x')|=|d(x_0,f^n(x))-d(x_0,f^n(x'))|\le d(f^n(x),f^n(x'))\le d(x,x')$

Nên g_n liên tục

Do $g_{n+1}(x)=d(x_0,f^{n+1}(x))=d(f(x_0),f(f^n(x)))\le d(x_0,f^n(x))=g_n(x), \forall x\in X \Rightarrow$ $(g_n(x))$dãy giảm không âm nên hội tụ

Đặt a= $\lim g_n(x)$

Giả sử a>0, do X compac dãy $f^n(x)$chữa dãy con hội tụ $\left(f^{n_k}(x)\right)_k$

Đặt $y=\lim\limits_{k\to\infty} f^{n_k}(x)$

Ta có $\left(g_{n_k+1}(x)\right)_k$ là dãy con của $\left(g_n(x)\right)_n$ nên $a=\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(x)=\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k+1}(x)$

$a=\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k}(x)=\lim\limits_{k\to\infty} d(x_0,f^{n_k}(x))=d(x_0,y)>0$

$a=\lim\limits_{k\to\infty} g_{n_k+1}(x)=\lim\limits_{k\to\infty} d(x_0,f^{n_k+1}(x))=\lim\limits_{k\to\infty} d(f(x_0),f(y))<d(x_0,y)=a$

mâu thuẩn vậy $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)=0, \forall x\in X$

c. CM $(g_n)_n$ hội tụ điều về 0 trên X

với $\varepsilon>0$ đặt $G_n=\{x\in X: g_n(x)<\varepsilon\}=g_n^{-1}(-\infty,\varepsilon)$ là tập mở

do $g_n(x)$ >$g_{n+1}(x)$nên $G_n\subset G_{n+1}$ ta có $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$

do X compac nên có n_0 : $X=\bigcup\limits_{n=1}^{n_0} G_n=G_{n_0}$

vậy $0\le g_n(x)<\varepsilon, \forall x\in X$ *khi* $n\ge n_0$ vậy $(g_n)_n$ hội tụ điều về 0 trên X

Bài 3 Cho V là không gian vectơ , f: V $\to$V là ánh xạ tuyến tính thoả mãn $f^2=f$ CM: Kerf+Imf=V và $\ker f\cap \operatorname{Im} f=\{0\}$

Giải

- CM: Kerf+Imf=V ta cần CM Kerf+Imf$\subset$V (1), Kerf+Imf$\supset$V (2)
- CM Kerf+Imf$\subset$V (1) hiển nhiên
- CM: Kerf+Imf$\supset$V (2)

Lấy tuỳ ý x$\in$V cần CM x$\in$ Kerf+Imf

Ta có x= x-f(x)+f(x) mà f(x) $\in$ Imf cần CM (x-f(x)) $\in$ Kerf cần CM f(x-f(x))=0

Xét f(x-f(x))=f(x)-f^2(x)=f(x)-f(x)=0 nên (x-f(x)) $\in$ Kerf hay x$\in$ Kerf+Imf

Vậy Kerf+Imf$\supset$V

Từ (1),(2) ta có Kerf+Imf=V

- CM $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

  Lấy y tuỳ y: y$\in$ $\ker f \cap \operatorname{Im} f$ cần CM y=0

  Do y$\in$ $\ker f \cap \operatorname{Im} f$ khi đó có x$\in$V : f(x)=y và f(y)=0

  Do f^2=f nên y=f(x)=f^2(x)=f(f(x))=f(y)=0

  Vậy y=0 hay $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$

Bài 4 : Cho f: $R^4 \to R^3$ định bởi

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-x_2+x_3,2x_1+x_4,2x_2-x_3+x_4)$

a. Tìm cơ sở và số chiều của Kerf, Imf
b. Tìm u $\in$ R^4 sao cho f(u)=(1,-1, 0)

Giải : a.

- Tìm cơ sở số chiều của Kerf

Với $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

$$Kerf=\{x\in R^4 : f(x)=0\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_4=0 \\ 2x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$$

ta có ma trận mở rộng

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & . & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & . & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & . & 0 \end{bmatrix}$$ biến đổi ta được hệ

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 2x_2-2x_3+x_4=0 \\ x_3=0 \\ x_4\in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=a \\ x_2=a \\ x_3=0 \\ x_4=2a \end{cases}$$ là nghiệm tổng quát của hệ

ta có dimKerf =1

cơ sở của Kerf là (1,1,0,2)

- Tìm cơ sở và số chiều của Imf

ta có $f(e_1)=(1,2,0)$, $f(e_2)=(-1,0,2)$, $f(e_3)=(1,0,-1)$, $f(e_4)=(0,1,1)$

$Imf=(f(e_1),f(e2),f(e_3),f(e_4))$

Ta có $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Nên dim Imf =3

Vậy cơ sở của Imf là $(f(e_1),f(e2),f(e_3))$

b. Tìm u $\in$ R^4 sao cho f(u)=(1,-1, 0)

ta có : $f(u)=(1,-1, 0) =(x_1-x_2+x_3,2x_1+x_4,2x_2-x_3+x_4)$

ta được hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_4 = -1 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2} \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2a \end{cases}$ $(a \in R)$

lập ma trận mở rộng biến đôi để giải hệ trên ta có $u=(x_1,x_2,x_3,x_4)$

<u>Bài 5</u> : Tìm GTR- VTR và chéo hoá ma trân

$A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

<u>Giải :</u> Xét đa thức đặt trưng

$$\begin{bmatrix} 5-a & -1 & 1 \\ -1 & 2-a & -2 \\ 1 & -2 & 2-a \end{bmatrix} = -a^3 + 9a^2 - 18a = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = 0 \\ a = 6 \\ a = 3 \end{array} \right.$$

vậy A có 3 GTR a=0, a=6, a=3

- tìm VTR

- với a=0 :ta có $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ta được hệ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -9x_2 + 9x_3 = 0 \\ x_3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = a \\ x_3 = a \end{cases}$ suy ra VTR (0,a,a) với a=1 thì VTR (0,1,1)

- với a=6: ta có $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

được hệ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2a \\ x_2 = -a \\ x_3 = a \end{cases}$ suy ra VTR (-2a,-a,a) với a=1 thì VTR (-2,-1,1)

- với a=3: ta có $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

được hệ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \end{cases}$ suy ra VTR (3a,a,a) với a=1 thì VTR (3,1,1)

- ma trận cần tìm là T=$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH CAO HỌC THÁNG 9/2005

MÔN CƠ BẢN: ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Bài 1: Cho hàm số $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{khi } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{khi } x=y=0 \end{cases}$

CMR hàm số f(x,y) có các đạo hàm riêng f_x', f_y' không liên tục tại (0,0) nhưng f(x,y) khả vi tại (0,0)

Giải :

- Tính các đhr f_x', f_y'
- tại $(x,y) \neq (0,0)$

ta có $f'_x = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

$f'_y = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

- tại (x,y)=(0,0)

$$f'_x = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{t^2}}{t} = 0$$

$$f'_y = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{t^2}}{t} = 0 \qquad \text{(do } \left|\sin\frac{1}{t^2}\right| \le 1 \text{)}$$

- xét sự liên tục của các đhr

nếu $\lim_{x,y\to 0} f'(x,y) = f'(0,0)$ thì các đhr liên tục

- ta có $\lim_{x,y\to 0} f'_x(x,y) = \lim_{x,y\to 0}(2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2})$

do $\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le 1 \Rightarrow \lim_{x,y\to 0} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$

do $\left|\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right| \le 1 \Rightarrow \lim_{x,y\to 0}\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \le \lim_{x,y\to 0}\frac{2x}{x^2+y^2} \to \infty$

vậy $\lim_{x,y\to 0} f'_x(x,y) = \lim_{x,y\to 0} 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \ne f'_x(0,0)$

- tương tự ta có $\lim_{x,y\to 0} f'_y(x,y) = \lim_{x,y\to 0} 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} \ne f'_y(0,0)$

vậy các đhr không liên tục tại (0,0)

- xét sự khả vi tại (0,0)

để CM f(x,y) khả vi tại (0,0) cần CM $\lim_{s,t\to 0}\varphi(s,t) = 0$

với $\varphi(s,t) = \frac{1}{\sqrt{s^2+t^2}}\left[f(s,t) - f(0,0) - f'_x(0,0)s - f'_y(0,0)t\right]$

ta có $\lim_{s,t\to 0}\varphi(s,t) = \lim_{s,t\to 0}\sqrt{s^2+t^2}\sin\frac{1}{s^2+t^2} = 0$ do $\left|\sin\frac{1}{s^2+t^2}\right| \le 1$

vậy f khả vi tại (0,0)

Bài 2: Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n (x-2)^n$$

Giải :

Đặt X=x-2

Ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n X^n$ voi $u_n = \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$

Xét L= $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{3n+2}\right| = \frac{1}{3}$

Nên R=3 và khoảng hội tụ là (-3,3)

Xét tại X=3 và X=-3 ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n (\pm 3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+3}{3n+2}\right)^n (\pm 1)^n$$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3n+3}{3n+2}\right| = 1 \neq 0$ nên tại X=3,X=-3 chuỗi không hội tụ

MHT chuỗi theo X là (-3,3)

MHT chuỗi theo x là (-1,5)

Bài 3: Gọi $M = \{x \in C_{[0,1]} : x(1) = 1, 0 \le x(t) \le 1, \forall t \in [0,1]\}$

a.CMR : M là tập đóng không rỗng và bị chặn trong không gian metric C([0,1]) với mêtric d(x,y)=max{ $|x(t)-y(t)|$: t $\in [0,1]$} với x(t),y(t) $\in C([0,1])$

b. xét $f : C([0,1]) \to R$ xác định bởi f(x)= $\int_0^1 x^2(t)dt$

CM : f liên tục trên M những f không đạt được GTNN trên M từ đó suy ra M không phải là tập compắc trong C([0,1])

Giải : a.

- CM : M là tập đóng

Lấy dãy $(x_n) \subset$ M : limx_n=x cần CM x $\in$ M

Ta có $0 \le x_n(t) \le 1, \forall t \in [0,1], x_n(1) = 1$

Cho n $\to \infty$ ta có $0 \le x(t) \le 1, \forall t \in [0,1], x(1) = 1$ nên x $\in$ M

Vậy M là tập đóng

b.

- CM f liên tục trên M

Xét tuỳ ý $x \in C([0,1])$, $(x_n) \subset M$: $\lim x_n = x$ cần CM $\lim f(x_n) = f(x)$

Ta có $\left|x_n^2(t) - x^2(t)\right| = \left|x_n(t) - x(t)\right|.\left|x_n(t) - x(t) + 2x(t)\right| \le d(x_n, x).[d(x_n, x) + N]$

Với $N = \sup 2|x(t)|, t \in [0,1]$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(x)| \le \int_0^1 \left|x_n^2(t) - x^2(t)\right| \le d(x_n, x).[d(x_n, x) + N]$$

do $\lim d(x_n,x)=0$ nên từ đây ta có $\lim f(x_n)=f(x)$

vậy f liên tục trên M

- CM f không đạt GTNN trên M
- Trước tiên ta CM $\inf f(M)=0$, nhưng không tồn tại $x \in M$ để $f(x)=0$

Đặt a= $\inf f(M)$ ta có $f(x) \ge 0, \forall x \in M$ nên $a \ge 0$

Với $x_n(t)=t^n$ ta có $x_n \in M$

$$a \le f(x_n) = \int_0^1 x_n^2(t)dt = \int_0^1 t^{2n}dt = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n+1} \to 0 \quad khi \quad n \to \infty$$

vậy a= $\inf f(M)=0$

- không tồn tại $x \in M$ để $f(x)=0$

giả sử tồn tai $x \in M$ để $f(x)=0$ ta có $\int_0^1 x^2(t)dt = 0, x^2(t) \ge 0, x^2(t)$ liên tục trên $[0,1]$ suy ra

$x(t)=0$ với mọi $t \in [0,1]$ điều này mâu thuẫn với $x(1)=1$ với mọi $x \in M$

vậy không tồn tại $x \in M$ để $f(x)=0$

từ đây ta suy ra M không là tập compăc

giả sử nếu M là tập compắc , f liên tục thì f đạt cực tiểu trên M tức là có $x_0 \in M$ sao cho $f(x_0)=\inf f(M)=0$ điều này mâu thuẫn với không tồn tại $x \in M$ để $f(x)=0$

vậy M không là tập compắc

<u>Bài 4:</u> Cho $f: R^3 \to R^3$ là một phép biến đổi tuyến tính xác định bởi

$f(u_1)=v_1$, $f(u_2)=v_2$, $f(u_3)=v_3$

$u_1=(1,1,1)$, $u_2=(0,1,1)$, $u_3=(0,0,1)$

$v_1=(a+3,a+3,a+3)$, $v_2=(2,a+2,a+2)$, $v_3=(1,1,a+1)$

a.tìm ma trận f với cơ sở chính tắc $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$

b. Tìm giá trị của a để f là một đẳng cấu

c. khi f không là một đẳng cấu hãy tìm cơ sở và số chiều của Imf và Kerf

d. với a=-3 f có chéo hoá được không trong trường hợp f chéo hoá được háy tìm một cơ sở để ma trận f voéi cơ sở đó có dạng chéo .

Giải :

Bài 5: Cho dạng toàn phương

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3$$

a. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

b. Với giá trị nào của a thì f là xác định dương và nữa xác định dương

Giải : a. ta có

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3=.......$$
$$................=(x_1+x_2+ax_3)^2+\left[x_2-(a-1)x_3\right]^2+(-2a^2+2a)x_3^2$$

đặt $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+ax_3 \\ y_2=x_2-(a-1)x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=y_1-y_2+(1-2a)y_3 \\ x_2=y_2+(a-1)y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

cơ sở f chính tắc là $u_1=(1,0,0),u_2=(-1,1,0),u_3=(1-2a,a-1,1)$

ma trận $T_{\varepsilon u}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1-2a \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b.f xác định dương khi $-2a^2+2a>0 \Leftrightarrow 0<a<1$

f nữa xác định dương khi $-2a^2+2a=0 \Leftrightarrow a=0,a=1$

GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH CAO HỌC THÁNG 9/2004

MÔN CƠ BẢN: ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Bài 1: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm luỹ thừa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n(n+1)}x^n$$

Giải :

Xét $u_n=\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^n$

Ta có L=$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e$

Nên $R=\frac{1}{L}=\frac{1}{e}$, khoảng hội tụ là $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$

Xét tai 2 đầu mút x= $\pm\frac{1}{e}$

Ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n(n+1)}\left(\pm\frac{1}{e}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^n(\pm1)^n\left(\frac{1}{e}\right)^n$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.\frac{1}{e}=e.\frac{1}{e}=1\neq0$

vậy MHT của chuỗi hàm luỹ thừa là $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$

Bài 2 : Cho hàm số f:R^2 $\to$R xác định bởi

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a. Xét sự liên tục của f trên R^2

b. Tính các đạo hàm riêng của f trên R^2

Giải : Chú ý : nếu $\lim\limits_{x,y\to0}f(x,y)=f(0,0)=0$ thì hàm số liên tục

- Tại mọi (x,y)$\neq$ (0,0) thì hàm số liên tục vì là hàm sơ cấp
- Xét sự liên tục của f trên R^2 tại (0,0)

- Tính $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x,y\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

Chọn dãy $\{M_n(x_n, y_n)\} = \left\{M_n(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})\right\} \to (0,0)$ khi $n \to \infty$

Ta có $f(M_n) = \dfrac{2\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0$, $\lim\limits_{x,y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x,y\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = 1 \neq 0 = f(0,0)$

vậy hàm số không liên tục tại (0,0)

- Tính các đhr f'_x, f'_y
- Tại (x,y) $\neq$ (0,0)

ta có $f'_x = \dfrac{2y(x^2+y^2) - 2x(2xy)}{(x^2+y^2)^2}$

$f'_y = \dfrac{2x(x^2+y^2) - 2y(2xy)}{(x^2+y^2)^2}$

- Tại (x,y)=(0,0)

ta có $f'_x = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$

$f'_y = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$

<u>Bài 3:</u> Tính tích phân $I = \iint\limits_D (2x - y)dxdy$

Với D là nữa trên của hình tròn có tâm tại điểm (1,0) bán kính 1

<u>Giải :</u>

Phương trình đường tròn tâm I(1,0) bán kính R=1 là $(x-1)^2+y^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 2x$

Đổi sang toạ độ cực

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $r > 0, \varphi \in 1$ chu kì

Ta có $x^2+y^2 \leq 2x$ ta có $r^2 \leq 2r\cos\varphi$ nên $r \leq 2\cos\varphi$

Vậy ta được $\begin{cases} 0 \leq r \leq 2\cos\varphi \\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Với $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ $\Rightarrow dxdy = rdrd\varphi$

Vậy

$$I=\iint_D (2x-y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\varphi}(2r\cos\varphi-r\sin\varphi)rdrd\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2(2\cos\varphi-\sin\varphi)dr=...=\frac{\pi}{16}-\frac{2}{3}$$ **Bài**

4: Cho tập hợp các số tự nhiên N với mọi m,n$\in$ N

Đặt $d(m,n)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{m+n} & \text{neu m} \neq \text{n}\\ 0 & \text{neu m = n}\end{cases}$

a. CM d là metric trên N

b. CM (N,d) là không gian metric đầy đủ

Giải : a. d là metric trên N

- d(m,n)$\geq 0, \forall m,n\in N$

d(m,n)=0 $\Leftrightarrow$ m=n

- $d(m,n)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{m+n} & \text{neu m} \neq \text{n}\\ 0 & \text{neu m = n}\end{cases}=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n+m}\\ 0\end{cases}=d(n,m)$

- CM d(m,n) $\leq$ d(m,l)+d(l,n) (1) $\forall l,m,n\in N$

TH1 : nếu m=n,m=l,n=l thì (1) đúng

TH2 : nếu m$\neq$ n thì $d(m,n)=1+\dfrac{1}{m+n}$

nếu m$\neq$ l thì $d(m,l)=1+\dfrac{1}{m+l}$

nếu l$\neq$ n thì $d(l,n)=1+\dfrac{1}{l+n}$

thì VT của (1) ≤ 2, VP của (1)≥ 2 nên (1) đúng

b. (N,d) là không gian metric đầy đủ

giả sử (x_n) là dãy cauchy trong (N,d) ta CM $x_n\rightarrow$ x$\in$ d

do (x_n) là dãy cauchy trong (N,d) nên ta có $\lim\limits_{m,n\to\infty}(x_m,x_n)=0$

$\forall\varepsilon>0,\exists n_0:\forall m,n\geq n_0:d(x_m,x_n)<\varepsilon$

chọn $\varepsilon=\frac{1}{2},\exists n_0:\forall m,n\geq n_0\rightarrow d(x_m,x_n)<\frac{1}{2}\rightarrow d(x_m,x_n)=0\rightarrow x_m=x_n.\forall m,n\geq n_0$

vậy $\exists x\in N:x_n=x:\forall n\geq n_0\Rightarrow x_n\rightarrow x$ trên d

Bài 5: tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Giải :

Bài 6: Cho ánh xạ tuyến tính f: $R^4 \to R^3$ có ma trận trong cặp cơ sở chính tắc là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

xác định nhân và ảnh của f , Hỏi f có đơn cấu , toàn cấu không? Vì sao?

Giải : từ mae trận tacó ánh xạ

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1+2x_3+x_4,2x_1+3x_2-x_3+x_4,-2x_1-5x_3+3x_4)$

Xác định nhân và ảnh của f tức là tìm cơ sở và số chiều của Imf, Kerf

- Tìm cơ sở và số chiều của Kerf

Ta có $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & . & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & . & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 3 & . & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & . & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -1 & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & . & 0 \end{bmatrix} \to$

Ta được hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \\ -x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 = \dfrac{5}{3}x_3 + \dfrac{1}{x}x_4 \\ x_3 = 5x_4 \\ x_4 = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -33a \\ x_2 = 26a \\ x_3 = 15a \\ x_4 = 3a \end{cases}, (a \in R)$

f có 1 ẩn tự do nên dimKerf = 1 và Kerf có cơ sở là (-33,26,15,3)

Vậy f không đơn cấu vì dimKerf = 1

- Tìm cơ sở, số chiều của Imf

Ta có

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & . & 0\\ 0 & 3 & 0 & . & 0\\ 2 & -1 & -5 & . & 0\\ 1 & 1 & 3 & . & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & . & 0\\ 0 & 3 & 0 & . & 0\\ 0 & 5 & 1 & . & 0\\ 0 & 1 & -5 & . & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & . & 0\\ 0 & -5 & 0 & . & 0\\ 0 & 3 & 0 & . & 0\\ 0 & 5 & 1 & . & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & . & 0\\ 0 & 1 & -5 & . & 0\\ 0 & 0 & 15 & . & 0\\ 0 & 0 & 26 & . & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & . & 0\\ 0 & 1 & 5 & . & 0\\ 0 & 0 & 390 & . & 0\\ 0 & 0 & 0 & . & 0\end{bmatrix}$$

Vậy Rank (B)=3 nên dimImf=3 và Imf có 1 cơ sở gồm 3 vectơ($f(e_1)$,$f(e_4)$,$f(e_2)$)

f không toàn cấu vì dimImf=3

<u>Bài 7:</u> Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{bmatrix}$

a. Tìm GTR-VTR của A

b. Tính A^{2004} .

<u>Giải :</u>

a. Tìm GTR- VTR của A

- Tìm GTR của A

Xét đa thức đặt trưng

Ta có: $\begin{bmatrix}-1-a & 3 & -1\\ -3 & 5-a & -1\\ -3 & 3 & 1-a\end{bmatrix}=(1-a)(a-2)^2=0\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}a=1\\ a=2\end{array}\right.$

Vậy A có 2 GTR a=1, a=2

- Tìm VTR của A

- Với a=1 ta có $\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ -3 & 4 & -1\\ -3 & 3 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Ta được hệ $\begin{cases}-2x_1+3x_2-x_3=0\\ x_2-x_3=0\\ x_3=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=1\\ x_3=1\end{cases}$ vậy có VTR (1,1,1)

- Với a=2 ta có $\begin{bmatrix}-3 & 3 & -1\\ -3 & 3 & -1\\ -3 & 3 & -1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-3 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Ta được hệ $\begin{cases}-3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\\ x_2 = a\\ x_3 = b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x_1 = 3x_2 - x_3\\ x_2 = a\\ x_3 = b\end{cases}$

Vậy có 2 VTR (1,1,0), (-1,0,3)

b.

ta có $Q = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$

ma trận chéo của A là $B = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

$(Q^{-1}AQ)^{2004} = Q^{-1}A^{2004}Q$

vậy $A^{2004} = QB^{2004}Q^{-1} = Q\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^{2004} Q^{-1} = Q\begin{bmatrix}1^{2004} & 0 & 0\\ 0 & 2^{2004} & 0\\ 0 & 0 & 2^{2004}\end{bmatrix}Q^{-1}$

GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH CAO HỌC THÁNG 9/2003

MÔN CƠ BẢN: ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Bài 1:

Bài 2:

Bài 3: Cho (X,d) là không gian metric compắc

a.Giả sử A_n là họ các tập con đóng trong X và $A_{n+1} \subset A_n$ mọi $n \in N$

CMR nếu vơi mọi $n \in N$, $A_n \neq \phi$ thì $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi$

b.Giả sử $f_n : X \to R, n \in N$ là các hàm liên tục và $f_1(x) \geq f_2(x) \geq .... \geq f_n(x) \geq ...., \forall x \in X$

CMR nếu $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall x \in X, (f_n)_{n\in N}$

Họ tụ đều về 0 trên X

Giải :

a. giả sử vơi mọi $n \in N$, $A_n \neq \phi$ CMR : $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi$

vơi mọi $n \in N$ lấy $x_n \in A_n$

do $A_{n+p} \subset A_n, \forall n, p \in N, nen$ $x_{n+p} \in A_n$

do X compắc nên với $(x_n)_n \subset X$ có dãy con $(x_{n_k})_k$ hội tụ

đặt $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$

do $n_k \geq k$ nên A_k là tập đóng với mọi i dãy $\left(x_{n_k}\right)_{k\geq i} \Rightarrow x \in A_i \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

vậy $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \phi$

b. cần CM :

1. $f_n(x) \geq 0$
2. $f_n(x) < \varepsilon$

ta có $f_1(x) \geq f_2(x) \geq .... \geq f_n(x) \geq ...., \forall x \in X$ và $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall x \in X$ nên $f_n(x) \geq 0$

với $\varepsilon > 0$ cho trước đặt $F_n = \{x \in X : f_n(x) < \varepsilon\} = f_n^{-1}(-\infty, \varepsilon)$

do $(-\infty, \varepsilon)$ là tập mở, f liên tục nên F_n mở

do $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ suy ra $f_n(x)$ là dãy giảm nên $F_n \subset F_{n+1}$

do $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall x \in X \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = X$

do X compắc nên có tập J hữu hạn trong N sao cho $\bigcup\limits_{n\in J} F_n = X$

đặt n_0=maxJ ta có được $\bigcup\limits_{n\in J} F_n = X = F_{n_0} \Rightarrow 0 \leq f_n(x) < f_{n_0}(x) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

vậy $\forall x \in X, (f_n)_{n\in N}$ hội tụ đều về 0 trên X

Bài 4: b tìm miền họi tụ của chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+d}\right)^n x^n$

Giải : xét $U_n = \left(\frac{n}{n+d}\right)^{n^2}$

Ta có $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+d}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+d}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^d}$

Bán kính hội tụ $R=e^d$, khoảng hội tụ $(-e^d;e^d)$

Xét tại 2 đầu mút x=e^d,x=-e^d

Ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+d}\right)^{n^2}(\pm e^d)=\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n\left(\frac{n}{n+d}\right)^{n^2}\left(e^d\right)\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|}=1\neq 0$

Vậy MHT của chuỗi là (-e^d;e^d)

GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH CAO HỌC THÁNG 9/2002

MÔN CƠ BẢN: ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Bài 1 : a. Cho hàm số $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{khi } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Xét tính liên tục của f(x,y) và các đhr $f_x^{'}, f_y^{'}$ trên tập xác định

Giải :

- Tại mọi (x,y)$\neq$ (0,0) f(x,y) liên tục vì là hàm sơ cấp
- Xét sự liên tục của f tại (x,y)= (0,0)

Nếu $\lim_{x,y\to 0} f(x,y)=f(0,0)=0$ thì hàm số liên tục

Ta có : $\lim_{x,y\to 0} f(x,y)=\lim_{x,y\to 0}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{x,y\to 0}\frac{x^3y}{x^2+y^2}-\lim_{x,y\to 0}\frac{y^3x}{x^2+y^2}$

Xét $\left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{x^2}{2}\Rightarrow\lim_{x,y\to 0}\frac{x^3y}{x^2+y^2}=0$

$\left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right|\leq\frac{y^2}{2}\Rightarrow\lim_{x,y\to 0}\frac{xy^3}{x^2+y^2}=0$

từ đó $\lim_{x,y\to 0} f(x,y)=f(0,0)=0$

vậy f liên tục

- Tính các đhr $f_x^{'}, f_y^{'}$
- Tại (x,y)$\neq$ (0,0)

$f_x^{'}=$

$f_y^{'}=$

- Tại (x,y)=(0,0)

$$f'_x = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$

$$f'_y = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

b. Tính tổng của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ trong MHT của nó

Giải : ta tìm được khoảng hội tụ là (-1,1)

Ta có $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1}.\frac{1}{x}$

Đặt $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n.x^{n-1}$ (1)

Lấy tích phân 2 vế của (1) trên đoạn [0,x] ta được

$\int_0^x S_1(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n.t^{n-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ (2) là CSN

đạo hàm 2 vế của (2) ta được $S_1(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

vậy $S(x) = \begin{cases} \frac{1}{x.(1-x)^2} & : x \neq 1 \\ 1 & : x = 1 \end{cases}$

Bài 2:

Bài 3:

Bài 4: b. Tìm các VTR- GTR của ma trận

$$A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Giải : Xét đa thức đặt trưng

$$\begin{bmatrix} 6-a & -2 & 2 \\ -2 & 5-a & 0 \\ 2 & 0 & 7-a \end{bmatrix} = (6-a)(a^2-12a-27) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a=6 \\ a=3 \\ a=9 \end{array} \right.$$

Vậy có 3 GTR a=6,a= 3, a= 9

- Tìm VTR

- Với a=6 ta có $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ta được hệ $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_3}{2} = -a \\ x_2 = 2a \\ x_3 = 2a \end{cases}$

Có VTR là (-1,2,2)

- Với a=3 ta có $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Ta được hệ

Có VTR là (,,)

- Với a=9 ta có $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Ta được hệ

Có VTR là (,,)