

CHƯƠNG I : ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

A.LÝ THUYẾT:

1.1 Đạo hàm riêng:

Định nghĩa: Cho hàm 2 biến f:

$$\begin{aligned} X &\rightarrow R^2 & X &\subseteq R^2 \\ (x, y) &\rightarrow Z = f(x, y) \\ X: &\text{tập xác định} \end{aligned}$$

Xét $f(x_0, y_0)$

$$f'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

1.2 VI PHÂN:

* Định nghĩa:

Cho hàm số $z = f(x, y)$ đạo hàm riêng của hàm số theo biến x, kí hiệu là:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = Z'_x = f'(x) \text{ là giới hạn } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

* Vi phân hai biến:

Định nghĩa:

Cho hàm số $z = f(x, y)$ thì

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

$$d^2 z = z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2$$

Tổng quát: $d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f$

B. BÀI TẬP:

Câu 1: Cho hàm số $z = f(x, y) = e^{2x+3y}$ Tính $z^{(n)}_{x^n} = ?$

Giải:

$$z'_x = (2x + 3y)'_x e^{2x+3y} = 2e^{2x+3y}$$

Ta có: $z''_{xx} = 2(2x + 3y)'_x e^{2x+3y} = 4e^{2x+3y}$

$$z'''_{xxx} = 4(2x + 3y)'_x e^{2x+3y} = 8e^{2x+3y}$$

$$\Rightarrow z^{(n)}_{x^n} = 2^n \cdot e^{2x+3y}$$

Câu 2: Cho hàm số $z = f(x, y) = xe^y$ Tính $z_{y^4x}^{(4)} = ?$

Giải:

$$z'_y = (xe^y)'_y = xe^y$$

$$z''_{yy} = (xe^y)'_y = xe^y$$

$$z'''_{yyy} = (xe^y)'_y = xe^y$$

$$\Rightarrow z_{y^4x}^{(4)} = (xe^y)'_x = e^y$$

Câu 3: Cho hàm số $z = f(x, y) = e^y \ln x$ Tính $z_{yxy^2}^{(4)} = ?$

Giải:

$$z'_y = (e^y \ln x)'_y = e^y \ln x$$

$$z''_{yx} = (e^y \ln x)'_x = \frac{e^y}{x}$$

Ta có:
$$z'''_{yxy} = \left(\frac{e^y}{x}\right)'_y = \frac{e^y}{x}$$

$$z_{yxy^2}^{(4)} = \left(\frac{e^y}{x}\right)'_y = \frac{e^y}{x}$$

Câu 4: Cho hàm số $z = f(x, y) = e^{xy}$ Tính $z_{x^5}^{(5)} = ?$

Giải:

$$z'_x = (e^{xy})'_x = ye^{xy}$$

Ta có:
$$z''_{xx} = (ye^{xy})'_x = y^2 e^{xy}$$

$$\Rightarrow z_{x^5}^{(5)} = y^5 e^{xy}$$

Câu 5: Cho hàm số $z = f(x, y) = \sin(xy)$ Tính $z_{x^n}^{(n)} = ?; z_{y^n}^{(n)} = ?$

Giải:

$$z'_x = (\sin(xy))'_x = y \cos(xy)$$

$$z''_{xx} = (y \cos(xy))'_x = -y^2 \sin(xy)$$

Ta có: $z''_{xy} = (-y^2 \sin(xy))'_y = \cos(xy) - xy \sin(xy)$

$$z'_y = (\sin(xy))'_y = x \cos(xy)$$

$$z''_{yy} = (x \cos(xy))'_y = -x^2 \sin(xy)$$

Câu 6: Cho hàm số $z = f(x, y) = \cos(xy)$ Tính $z''_{xx} = ?$; $z''_{xy} = ?$; $z''_{yy} = ?$

$$z'_x = (\cos(xy))'_x = -y \sin(xy)$$

$$z''_{xx} = (-y \sin(xy))'_x = -y^2 \cos(xy)$$

$$z'''_{xxx} = (-y^2 \cos(xy))'_x = y^3 \sin(xy)$$

$$\Rightarrow z^{(n)}_{x^n} = y^n \cos\left(xy + n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$z'_y = (\cos(xy))'_y = -x \sin(xy)$$

$$\Rightarrow z^{(n)}_{y^n} = x^n \cos\left(xy + n \frac{\pi}{2}\right)$$

Câu 7: Tìm vi phân cấp một của hàm số: $z = 2x + 4y$

Giải:

Ta có: $dz = Z'_x dx + Z'_y dy$

$$z = x^2 + 4^y$$

$$Z'_x = (x^2 + 4^y)' = 2x$$

$$Z'_y = (x^2 + 4^y)' = 4^y \ln 4$$

$$\Rightarrow dz = 2x dx + 4^y \ln 4 dy$$

Câu 8: Tìm vi phân cấp một của hàm số: $z = \ln(\sqrt{x-y})$

Giải:

Ta có: $dz = Z'_x dx + Z'_y dy$

$$z = \ln(\sqrt{x-y})$$

$$z'_x = \ln(\sqrt{x-y})'_x = \frac{(\sqrt{x-y})'}{\sqrt{x-y}} = \frac{1}{2(\sqrt{x-y})} = \frac{1}{2(x-y)}$$

$$z'_y = \ln(\sqrt{x-y})'_x = \frac{(\sqrt{x-y})'_x}{\sqrt{x-y}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-y}}}{\sqrt{x-y}} = -\frac{1}{2(x-y)}$$

$$\Rightarrow dz = \frac{1}{2(x-y)} dx - \frac{1}{2(x-y)} dy = \frac{dx-dy}{2(x-y)}$$

Câu 9: Tìm vi phân cấp một của hàm số: $z = \text{arctg}(y-x)$.

Giải:

Ta có: $dz = Z'_x dx + Z'_y dy$

$$z = \text{arctg}(y-x)$$

$$Z'_x = (\text{arctg}(y-x))'_x = -\frac{1}{1+(y-x)^2}$$

$$Z'_y = (\text{arctg}(y-x))'_y = \frac{1}{1+(y-x)^2}$$

$$\Rightarrow dz = \frac{-dx}{1+(y-x)^2} + \frac{dy}{1+(y-x)^2} = \frac{dy-dx}{1+(y-x)^2}$$

Câu 10: Tìm vi phân dz của hàm: $z = x^2 - 2xy + \sin(xy)$

Giải:

$$dz = Z'_x dx + Z'_y dy$$

$$Z'_x = 2x - 2y + y \cdot \cos(xy)$$

$$Z'_y = -2x + x \cdot \cos(xy)$$

$$\Rightarrow dz = [2(x-y) + y \cdot \cos(xy)] dx - [x(2 - \cos(xy))] dy$$

Câu 11: Tính vi phân cấp 2 của hàm: $z = \sin^2 x + e^{y^2}$

Giải:

$$z'_x = 2(\sin x)' \cdot \sin x = 2 \cos x \sin x = \sin 2x$$

$$z'_y = 2y \cdot e^{y^2}$$

$$z''_{xx} = 2 \cos 2x$$

$$z''_{xy} = 0$$

$$z''_{yy} = 2 \cdot e^{y^2} + 4y^2 \cdot e^{y^2}$$

$$\Rightarrow d^2 z = 2 \cos 2x dx^2 + 2e^{y^2} (1 + 2y^2) dy^2$$

Câu 12: Cho hàm hai biến $z = e^{x+2y}$, tính $z''_{xx} = ?$, $z''_{yy} = ?$, $z''_{xy} = ?$

Giải:

$$\begin{aligned} z'_x &= (x+2y)' e^{x+2y} = e^{x+2y} \\ z''_{xx} &= (x+2y)'' e^{x+2y} = e^{x+2y} \\ z'_y &= (x+2y)' \cdot 2 e^{x+2y} = 2e^{x+2y} \\ z''_{yy} &= 2 \cdot (x+2y)' \cdot 2 e^{x+2y} = 4e^{x+2y} \\ z'_x &= (x+2y)' e^{x+2y} = e^{x+2y} \\ z''_{xy} &= (x+2y)' \cdot 2 e^{x+2y} = 2e^{x+2y} \end{aligned}$$

Câu 13: Tìm vi phân cấp hai d^2z của hàm hai biến $z = y \ln x$

Giải:

Ta có:

$$d^2z = Z''_{xx} dx^2 + 2Z''_{xy} dx dy + Z''_{yy} dy^2$$

$$Z'_x = \frac{y}{x}$$

$$Z''_{xx} = -\frac{y}{x^2}$$

$$Z'_y = \ln x$$

$$Z''_{yy} = 0$$

$$Z''_{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow d^2z = -\frac{y}{x^2} \cdot dx^2 + \frac{2}{x} \cdot dx dy$$

Câu 14: Tìm vi phân cấp hai d^2z của hàm hai biến $z = x^2 + x \sin^2 y$

Giải:

Ta có:

$$d^2z = Z''_{xx} dx^2 + 2Z''_{xy} dx dy + Z''_{yy} dy^2$$

$$Z'_x = 2x + \sin^2 y$$

$$Z''_{xx} = 2$$

$$Z'_y = \sin^2 y + 2x \sin 2y$$

$$Z''_{yy} = -2x \cos 2y$$

$$Z''_{xy} = 2 \sin y \cos y = -2 \sin 2y$$

$$\Rightarrow d^2z = 2dx^2 - 2 \sin 2y dx dy - 2x \cos 2y dy^2$$

Câu 15: Tìm vi phân cấp hai d^2z của hàm hai biến $z = x^2 + x \cos^2 y$.

Giải:

$$d^2z = Z''_{xx} dx^2 + 2Z''_{xy} dx dy + Z''_{yy} dy^2$$

$$Z'_x = 2x + \sin^2 y$$

$$Z''_{xx} = 2$$

$$Z'_y = \sin^2 y + 2x \sin 2y$$

$$Z''_{yy} = -2x \cos 2y$$

$$Z''_{xy} = 2 \sin y \cos y = -2 \sin 2y$$

$$\Rightarrow d^2z = 2dx^2 - 2 \sin 2y dx dy - 2x \cos 2y dy^2$$

Câu 16: Tìm vi phân cấp hai của hàm hai biến $z = x^2 y^3$.

Giải:

Ta có:

$$d^2z = Z''_{xx} dx^2 + 2Z''_{xy} dx dy + Z''_{yy} dy^2$$

$$z''_{xx} = (x^2 y^3)''_{xx} = 2y^3$$

$$z''_{xy} = (x^2 y^3)''_{xy} = 6xy^2$$

$$z''_{yy} = (x^2 y^3)''_{yy} = 6x^2 y$$

$$\Rightarrow d^2z = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2$$

CHƯƠNG II: CỰC TRỊ

A. LÝ THUYẾT:

1.1. CỰC TRỊ TỰ DO:

Cho hàm số $z = f(x,y)$ xác định trên miền $D \subseteq \mathbb{R}^2$
 Điểm $P(a,b)$ được gọi là cực trị địa phương của hàm $z = f(x,y)$ nếu:
 giả thiết: $f(a;b) \geq f(x,y), \forall (x,y) \in Q(P)$ lân cận điểm P

Cực tiểu địa phương $f(a;b) < f(x,y)$

Cực trị = cực đại + cực tiểu

Điểm dừng: $P(a;b)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a;b) = 0; \frac{\partial f}{\partial y}(a;b) = 0$$

Nếu f tồn tại cực trị địa phương thì nó đạt cực trị địa phương tại các điểm dừng

*Phương pháp tìm cực trị tự do:

$$Z = f(x,y), D$$

Tìm cực đại:

Bước 1: z'_x, z'_y

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow I(x_o, y_o)$$

$I(x_o, y_o)$ được gọi là điểm dừng.

Bước 2:

Tính $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$

Bước 3:

$$A = z''_{xx}(x_o, y_o)$$

$$\text{Đặt } B = z''_{xy}(x_o, y_o)$$

$$C = z''_{yy}(x_o, y_o)$$

$$\text{Xét } \Delta = AC - B^2$$

Nếu $\Delta < 0 \rightarrow$ điểm (x_o, y_o) không phải là cực trị

Nếu $\Delta > 0 \rightarrow (x_o, y_o)$ là cực trị

Với $A > 0 \Rightarrow (x_o, y_o)$ là điểm cực tiểu

Với $A < 0 \Rightarrow (x_o, y_o)$ là điểm cực đại

$\Delta = 0$ dùng phương pháp khác hoặc chưa thể kết luận

1.2 CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN:

Cho hàm số $z = f(x,y)$ và hàm số $\varphi(x,y)$ Điểm (x_0,y_0) được gọi là điểm cực trị của hàm số $f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x_0,y_0)=0$ nếu nó là cực trị của $z = f(x,y)$ và thoả mãn $\varphi(x_0,y_0)=0$

* Điều kiện cần:

Giả sử (x_0,y_0) là cực trị của hàm $z = f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$. Ta giả thiết thêm các hàm $f(x,y)$; $\varphi(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận của điểm (x_0,y_0) . Khi đó sẽ tồn tại một số λ thoả:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0; y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0; y_0) = 0 \\ \varphi(x_0; y_0) = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Khi đó (x_0,y_0) gọi là điểm dừng

λ : nhân tử Lagrange

* Phương pháp tìm cực trị có điều kiện :

Cách 1: Từ $\varphi(x,y)=0$ ta tính $y = y(x)$. Thay $y = y(x)$ vào $f(x, y(x))$ ta được hàm một biến theo x

Cách 2:

* Giải hệ (I) để tìm điểm dừng (x_0, y_0) và λ_0

$$\begin{cases} A = L''_{xx}(x_0; y_0; \lambda_0) \\ B = L''_{xy}(x_0; y_0; \lambda_0) \\ C = L''_{yy}(x_0; y_0; \lambda_0) \end{cases}$$

Xét $\Delta = AC - B^2$

Nếu $\Delta < 0$ hàm f không có cực trị tại (x_0, y_0)

Nếu $\Delta > 0$ hàm f có cực trị

+ $A > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu

+ $A < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ là điểm cực đại

B. BÀI TẬP:

Câu 17: Cho hàm $z = x^2 - 2x + y^2$ Tìm cực trị?

Giải:

Ta có :

$$z'_x = (x^2 - 2x + y^2)'_x = 2x - 2$$

$$z'_y = (x^2 - 2x + y^2)'_y = 2y$$

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2x-2=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

\Rightarrow điểm $M(1,0)$ là điểm dừng

Đặt:

$$A = z''_{xx} = (2x - 2)'_x = 2$$

$$C = z''_{yy} = (2y)'_y = 2$$

$$B = z''_{xy} = (2x - 2)'_y = 0$$

Ta có: $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$ Hàm có cực trị.

Và $A = 2 > 0$ Hàm đạt cực tiểu tại điểm $M(1,0)$

Câu 18: Cho hàm $z = x^4 - 8x^2 + y^2 + 5$ Tìm cực trị?

Giải:

$$z'_x = 4x^3 - 16x$$

$$z'_y = 2y$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 16x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x^2 - 4) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(0;0); M_2(2;0); M_3(-2;0)$$

$$z''_{xx} = 12x^2 - 16$$

$$z''_{xy} = 0$$

$$z''_{yy} = 2$$

Có 3 điểm dừng $M_1(0;0); M_2(2;0); M_3(-2;0)$

$+M_1(0;0)$

$$A_1 = z''_{xx} = 12x^2 - 16 = -16$$

$$B_1 = z''_{xy} = 0$$

$$C_1 = z''_{yy} = 2$$

$$\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = -16 * 2 - 0^2 = -32 < 0$$

Vậy $M_1(0;0)$ không phải là cực trị của hàm số

$+M_2(2;0)$

$$A_2 = z''_{xx} = 12x^2 - 16 = 32$$

$$B_2 = z''_{xy} = 0$$

$$C_2 = z''_{yy} = 2$$

$$\Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 32 * 2 - 0^2 = 64 > 0, A_2 > 0$$

Vậy $M_2(2;0)$ là điểm cực tiểu của hàm

$+M_3(-2;0)$

$$A_3 = z''_{xx} = 12x^2 - 16 = 64$$

$$B_3 = z''_{xy} = 0$$

$$C_3 = z''_{yy} = 2$$

$$\Delta_3 = A_3 C_3 - B_3^2 = 64 * 2 - 0^2 = 128 > 0, A_3 > 0$$

Vậy $M_3(-2;0)$ là điểm cực tiểu của hàm

Câu 19: Cho hàm $z = x^2 - 2xy + 1$ Tìm cực trị?

Giải:

Ta có :

$$z'_x = (x^2 - 2xy + 1)'_x = 2x - 2y$$

$$z'_y = (x^2 - 2xy + 1)'_y = -2x$$

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow điểm $M(0,0)$ là điểm dừng.

$$z''_{xx} = (2x - 2y)'_x = 2$$

$$z''_{xy} = (2x - 2y)'_y = -2$$

$$z''_{yy} = (-2x)'_y = 0$$

Đặt:

$$A = z''_{xx} = 2$$

$$B = z''_{xy} = -2$$

$$C = z''_{yy} = 0$$

$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 0 - (-2)^2 = -4 < 0$$

Hàm z không có cực trị tại $M(0;0)$

Câu 20: Cho hàm $z = x^2 + xy + y^2$ Tìm cực trị?

$$z'_x = 2x + y$$

$$z'_y = x + 2y$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0;0)$$

$$A = z''_{xx} = 2$$

$$B = z''_{xy} = 1$$

$$C = z''_{yy} = 2$$

Có 1 điểm dừng $M(0;0)$

$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0 \Rightarrow M(0;0) \text{ là cực trị}$$

Và $A = 2 > 0 \Rightarrow M(0;0)$ là cực tiểu của hàm z

Câu 21: Cho hàm $z = x^2 - y^2 + 2x - y + 1$ Tìm cực trị?

Giải:

Ta có: $z'_x = (x^2 - y^2 + 2x - y + 1)'_x = 2x + 2$

$$z'_y = (x^2 - y^2 + 2x - y + 1)'_y = -2y - 1$$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ -2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

\Rightarrow điểm $M\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ là điểm dừng

Đặt:

$$A = z''_{xx} = (2x + 2)'_x = 2$$

$$B = z''_{xy} = (2x + 2)'_y = 0$$

$$C = z''_{yy} = (-2y - 1)'_y = -2$$

$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$$

Hàm z có một điểm dừng $M\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ nhưng không có cực trị.

Câu 22: Cho hàm $z = x^3 + 27x + y^2 + 2y + 1$ Tìm cực trị?

Giải:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 + 27 \\ z'_y = 2y + 2 \end{cases} ; \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 27 = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{hệ vô nghiệm, không có điểm dừng}$$

Câu 23 : Cho hàm $z = 2x^2 - 6xy + 5y^2 + 4$ Tìm cực trị?

Giải:

$$z'_x = 4x - 6y$$

$$z'_y = -6x + 10y$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 10y + 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0;0)$$

Có 1 điểm dừng $M(0;0)$

$$A = z''_{xx} = (4x - 6y)'_x = 4$$

$$\text{Đặt: } B = z''_{xy} = (4x - 6y)'_y = -6$$

$$C = z''_{yy} = (-6x + 10y)'_y = 10$$

$$\Delta = 40 - 36 = 4 > 0; A = 4 > 0 \Rightarrow M(0;0) \text{ là điểm cực tiểu}$$

Câu 24 : Cho hàm $z = x^4 - y^4 - 4x + 32y + 8$ Tìm cực trị?

Giải:

$$z'_x = (x^4 - y^4 - 4x + 32y + 8)'_x = 4x^3 - 4$$

$$z'_y = (x^4 - y^4 - 4x + 32y + 8)'_y = -4y^3 + 32$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4 = 0 \\ -4y^3 + 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M(1;2)$$

Có 1 điểm dừng $M(1;2)$

$$A = z''_{xx} = (4x^3 - 4)'_x = 12x^2 = 12$$

$$\text{Đặt: } B = z''_{xy} = (4x^3 - 4)'_y = 0$$

$$C = z''_{yy} = (-4y^3 + 32)'_y = -12y^2 = -48$$

$$\Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 12 * (-48) - 0^2 = -576 < 0$$

Vậy hàm Z không có cực trị tại $M(1; 2)$

Câu 25: Tìm cực trị của hàm số: $Z = 2x^2 + y^2 - 2y - 2$ với điều kiện $\varphi(x, y) = -x + y + 1 = 0$

Giải:

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 + y^2 - 2 + \lambda(-x + y + 1)$$

$$L'_x = 4x - \lambda$$

$$L'_y = 2y - 2 + \lambda$$

$$\begin{cases} 4x - \lambda = 0 & (1) \\ 2y - 2 + \lambda = 0 & (2) \\ -x + y + 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \lambda = 4x \quad (1')$$

$$(3) \Rightarrow y = x - 1 \quad (2')$$

thế (1'), (2') vào (2) ta có:

$$2(x-1) - 2 + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 - 2 + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}; \lambda = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$$

$$d^2L = 4dx^2 + 0dxdy + 2dy^2$$

$$d\varphi = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy$$

$$= -dx + dy = 0$$

$$\Leftrightarrow dy = dx$$

$$d^2L\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right) = 4dx^2 + 2dx^2 = 6dx^2 > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \text{ là cực tiểu}$$

Câu 26 : Cho hàm $z = -3x^2 + 2e^y - 2y + 3$ Tìm cực trị?

Giải:

$$z'_x = (-3x^2 + 2e^y - 2y + 3)'_x = -6x$$

$$z'_y = (-3x^2 + 2e^y - 2y + 3)'_y = 2e^y - 2$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x = 0 \\ 2e^y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0;0)$$

Có 1 điểm dừng $M(0;0)$

$$A = z''_{xx} = (-6x)'_x = -6$$

$$B = z''_{xy} = (-6x)'_y = 0$$

Đặt: $C = z''_{yy} = (2e^y - 2)'_y = 2e^y = 2 * e^0 = 2$

$$\Rightarrow \Delta = AC - B^2 = -6 * 2 - 0^2 = -12 < 0$$

Vậy hàm Z không có cực trị tại $M(0;0)$

Câu 27 : Cho hàm $z = x^2 - y - \ln|y| - 2$ Tìm cực trị?

Giải:

$$z'_x = (x^2 - y - \ln|y| - 2)'_x = 2x$$

$$z'_y = (x^2 - y - \ln|y| - 2)'_y = -1 - \frac{1}{y}$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -1 - \frac{1}{y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow M(0; -1)$$

Có 1 điểm dừng $M(0; -1)$

$$A = z''_{xx} = (2x)'_x = 2$$

$$B = z''_{xy} = (2x)'_y = 0$$

Đặt: $C = z''_{yy} = \left(-1 - \frac{1}{y}\right)'_y = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$

$$\Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 2 * 1 - 0^2 = 2 > 0$$

Và $A = 2 > 0 \Rightarrow M(0;0)$ là điểm cực tiểu của hàm z

Câu 28 : Cho hàm $z = x^6 - y^5 - \cos^2 x - 32y$ Tìm cực trị?

Giải:

$$z'_x = (x^6 - y^5 - \cos^2 x - 32y)'_x = 6x^5 + \sin 2x$$

$$z'_y = (x^6 - y^5 - \cos^2 x - 32y)'_y = -5y^4 - 32$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^5 + \sin 2x = 0 \\ -5y^4 - 32 = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow hệ vô nghiệm

Không có điểm dừng. Vậy hàm z không có cực trị

Câu 29: Cho hàm $z = xe^y + x^3 + 2y^2 - 4y$ Tìm cực trị?

Giải:

$$z'_x = (xe^y + x^3 + 2y^2 - 4y)'_x = e^y + 3x^2$$

$$z'_y = (xe^y + x^3 + 2y^2 - 4y)'_y = xe^y + 4y - 4$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^y + 3x^2 = 0 \\ xe^y + 4y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = -\frac{e^y}{3}$$

\Rightarrow điều này vô lý \Rightarrow hệ vô nghiệm

Không có điểm dừng. Vậy hàm z không có cực trị

Câu 30: Cho hàm $z = 2x^2 - 4x + \sin y - \frac{y}{2}, (-\pi < y < \pi)$ Tìm cực trị?

Giải

$$z'_x = \left(2x^2 - 4x + \sin y - \frac{y}{2}\right)'_x = 4x - 4$$

$$z'_y = \left(2x^2 - 4x + \sin y - \frac{y}{2}\right)'_y = \cos y - \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 0 \\ \cos y - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Có 1 điểm dừng $M\left(1; \frac{\pi}{3}\right)$

$$A = z''_{xx} = (4x - 4)'_x = 4$$

$$B = z''_{xy} = (4x - 4)'_y = 0$$

$$\text{Đặt: } C = z''_{yy} = \left(\cos y - \frac{1}{2} \right)'_y = -\sin y = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta = AC - B^2 = 4 * \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 0^2 = -2\sqrt{3} < 0$$

Vậy hàm z không có cực trị tại $M \left(1; \frac{\pi}{3} \right)$

Câu 31 : Cho hàm $z = \ln x - x + \ln|y| - \frac{y^2}{2}$ Tìm cực trị?

Giải:

$$z'_x = \left(\ln x - x + \ln|y| - \frac{y^2}{2} \right)'_x = \frac{1}{x} - 1$$

$$z'_y = \left(\ln x - x + \ln|y| - \frac{y^2}{2} \right)'_y = \frac{1}{y} - y$$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 = 0 \\ \frac{1}{y} - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Có 2 điểm dừng $M_1(1;1); M_2(1;-1)$

* Xét điểm $M_1(1;1)$:

$$A = z''_{xx} = \left(\frac{1}{x} - 1 \right)'_x = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$B = z''_{xy} = \left(\frac{1}{x} - 1 \right)'_y = 0$$

Đặt :

$$C = z''_{yy} = \left(\frac{1}{y} - y \right)'_y = -\frac{1}{y^2} - 1 = -\frac{1}{1^2} - 1 = -2$$

$$\Rightarrow \Delta = AC - B^2 = (-1) * (-2) - 0^2 = 2 > 0$$

Và $A = -1 < 0 \Rightarrow M_1(1;1)$ là điểm cực đại của hàm z

Có 2 điểm dừng $M_1(1;1); M_2(1;-1)$

* Xét điểm $M_2(1;-1)$:

$$A = z''_{xx} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)'_x = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{1^2} = -1$$

$$B = z''_{xy} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)'_y = 0$$

Đặt :

$$C = z''_{yy} = \left(\frac{1}{y} - y\right)'_y = -\frac{1}{y^2} - 1 = -\frac{1}{(-1)^2} - 1 = -2$$

$$\Rightarrow \Delta = AC - B^2 = (-1) * (-2) - 0^2 = 2 > 0$$

Và $A = -1 < 0 \Rightarrow M_2(1; -1)$ là điểm cực đại của hàm z

Câu 32 : Cho hàm $z = \ln(x^2 - 2y)$ với điều kiện $x - y - 2 = 0$

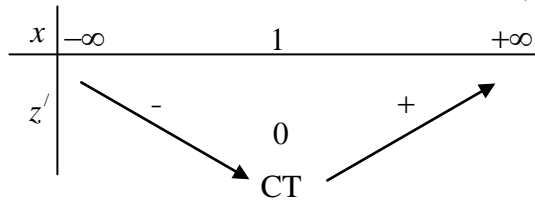
Giải:

$$x - y - 2 = 0 \Rightarrow y = x - 2$$

$$z = \ln(x^2 - 2x + 4)$$

Đặt $z' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 4}$

$$z' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 4} = 0, x^2 - 2x + 4 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$



Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $M(1; -1)$

Câu 33 : Cho hàm $z = \ln|1 + x^2 y|$ với điều kiện $x - y - 3 = 0$

Giải:

$$x - y - 3 = 0 \Rightarrow y = x - 3$$

$$z = \ln|1 + x^2(x - 3)| = \ln|x^3 - 3x^2 + 1|$$

$$z' = \frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2 + 1}$$

$$z' = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-0.5	0	0.6	2	2.8	$+\infty$
$3x^2 - 6x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2 - 3x^2 + 1$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

x	$-\infty$	-0.5	0	0.6	2	2.8	$+\infty$
z'	$-$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$+$
			\nearrow	\searrow		\nearrow	\searrow
			CĐ			CĐ	

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $M_1(0; -3)$ và $M_2(2; -1)$

Câu 33 : Cho hàm $z = \frac{x^3}{3} - 3x + y$ với điều kiện $-x^2 + y = 1$

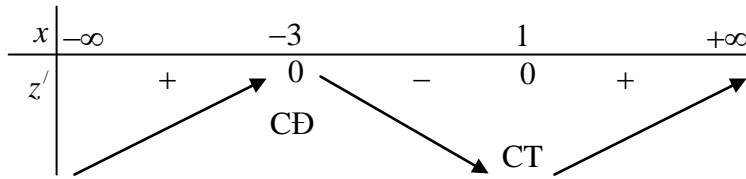
Giải:

$$-x^2 + y = 1 \Rightarrow y = x^2 + 1$$

$$z = \frac{x^3}{3} - 3x + x^2 + 1$$

$$z' = x^2 + 2x - 3$$

$$z' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = -3 \\ y = 10 \end{cases}$$



Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $M_1(-3;10)$, đạt cực tiểu tại $M_2(1;2)$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ngô Thành Phong. Giáo trình toán cao cấp ĐHKHTN 2003
2. Nguyễn Đình Trí và nhiều tác giả khác
3. Trang web Google.com