PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO ÔN THI VÀO LỚP I0

Phương trình $a x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (1) ($a \neq 0$)

-Biến đổi vế trái về dạng tích bậc nhất với bậc hai để giải
-Nếu a+b+c+d=0 thì (1) sẽ có 1nghiệm x=1
- Nếu a-b+c-d=0 thì (1) sẽ có 1nghiệm x=-1. Khi đó ta đẽ dàng Biến đổi vế trái về dạng tích
-Nếu (1) có các hệ số nguyên , nếu có nghiệm nguyên thì nghiệm nguyên đó là ước của hạng tử tự do , giả sử 3 nghiệm là $x_1;x_2;x_3$ thì $x_1+x_2+x_3 = -b/a$

$x_1.x_2.x_3 = -d/a$

$x_1.x_2 + x_1x_3 + x_2.x_3 = c/a$

Bài 4.1:

a) Giải phương trình $2x^3+7x^2+7x+2=0$

a-b+c-d=0 thì (1) sẽ có 1nghiệm x=-1. Khi đó ta đẽ dàng Biến đổi vế trái về dạng tích

b) Giải phương trình $x^3+7x^2-56x+48=0$

a+b+c+d=0 thì (1) sẽ có 1nghiệm x=1

a) Giải phương trình $2x^3+5x^2+6x+3=0$

e) Giải phương trình sau : $x^3+ 4x^2 -29+24 =0$ (1) <=> $(x-1)(x^2+5x-24)=0$

<u>Bài 4.2</u> Giải phương trình sau $4x^4 - 109x^2 + 225 = 0$ (1)

<u>Bài 4.3</u> phương trình hệ số đối xứng bậc 4 : $a x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

(x là ẩn , a, b, c, d, e là các hệ số ;$a \neq 0$)

(Đặc điểm : vế trái các hệ số của các số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau)

phương pháp giải gồm 4 bước

-Nhận xét x=0 không phải là nghiệm của (1) ta chia cả hai vế (1) cho x^2 (đk $x \neq 0$) rồi nhóm các số hạng cách đều hai số hạng đầu và cuối thành từng nhóm ta được phương trình mới

-Đặt ẩn phụ : $(x+\frac{1}{x}) = t$ (3) => $x^2+\frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ ta được phương trình ẩn t

-giải phương trình đó ta được t = ….

- thay các giá trị của t vào (3) để tìm x và trả lời nghiệm (1)

Giải phương trình sau

$10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 10 = 0$ (1)

Ta nhận thấy x=0 không phải là nghiệm của (1)

chia cả hai vế (1) cho x^2 (đk $x \neq 0$)

ta được pt <=> $10x^2 - 27x - 110 - \frac{27}{x} + \frac{10}{x^2} = 0$

Nhóm các số hạng cách đều hai số hạng đầu và cuối thành từng nhóm ta được PT

$$10(x^2+\frac{1}{x^2}) - (x+\frac{1}{x}) - 110 = 0 \quad (2)$$

Đặt ẩn phụ $(x+\frac{1}{x}) = t$ (3) => $x^2+\frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ thay vào (2) ta có

<=> $10t^2 -27t -130=0$ (4) Giải (4) ta được $t_1=-\frac{5}{2}$; $t_2=\frac{26}{5}$

+ Với $t_1=-\frac{5}{2}$ ⇔ $(x+\frac{1}{x}) =-\frac{5}{2}$ ⇔ $2x^2 +5x+2=0$ có nghiệm là $x_1=-2$; $x_2=-1/2$

+Với ; $t_2=\frac{26}{5}$ ⇔ $(x+\frac{1}{x}) = \frac{26}{5}$ ⇔ $5x^2-26x+5 =0$ có nghiệm là $x_3=5$; $x_4=1/5$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{-1}{2};-2;\frac{1}{5};5\right\}$

Bài 4.4 Phương trình hồi quy dạng tổng quát : $a x^4 + bx^3+ cx^2 + dx +e =0$ (1)

Trong đó x là ẩn , a, b, c, d, e là các hệ số ; $a \neq 0$ $e\neq 0$) và $\frac{e}{a}=(\frac{d}{b})^2$;

phương tình hệ số đối xứng bậc 4 chỉ là 1 trường hợp đặc biệt của phương trình hồi quy

Chú ý :Khi $\frac{e}{a}$ =1hay a=e thì $d=\pm b$; lúc đó (1) có dạng $a x^4 + bx^3+ cx^2 \pm bx +e =0$

Cách giải:

-Do x=0 không phải là nghiệm của phương trình (1)nên chia cả hai vế cho x^2 ta được

$$a x^2 +bx +c +\frac{d}{x}+\frac{c}{x^2} = 0 \quad (2)$$

Nhóm hợp lí $a (x^2 +\frac{c}{ax^2})+b(x+\frac{d}{bx})+c=0$

-Đổi biến đặt $x+\frac{d}{bx}$ =t => $x^2 +(\frac{d}{bx^2})+2\frac{d}{b}=t^2$ do $(d/b)^2$ =c/a

nên $x^2+ c/ a x^2=t^2 -2. d/b$

Khi đó ta có phương trình $a (t^2 - 2\frac{d}{b})$ bt +c =0

Ta được phươnmg trình (3) trung gian như sau : $at^2+ bt +c=0$ (3)

-Giải (3) ta được nghiệm của phương trình ban đầu

Giải phương trình : $x^4-4x^3-9x^2+8x+4=0$ (1)

Nhận xét $4/1=(\frac{8}{-4})^2$; Nên phương trình (1) là phương trình hồi quy

- x=0 không phải là nghiệm của (1)
- Do đó chia cả hai vế phương trình cho x^2 $(x \neq 0)$ ta được

$$x^{2-} -4x -9 +\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2} =0 \Leftrightarrow (x^2 + \frac{4}{x^2}) - 4(x -\frac{2}{x}) -9 =0 \quad (2)$$

* Đặt $(x -\frac{2}{x})$ =t (3) => .$(x^2 + \frac{4}{x^2})$ $=t^2 +4$ thay vào (2)

Phương trình (1) trở thành $t^2-4t -5 =0$ có nghiệm là $t_1=-1$; $t_2=5$

nhận xét : tương tự như giải phương trình bậc 4 hệ số đối xứng , chỉ khác bước đặt ẩn phụ

Đặt $x+\frac{m}{bx}$ =yb => $x_2{}^{+}$ $\frac{m^2}{b^2x^2}=y^2-\frac{2m}{b}$

Bài 4.5 Phương trình dạng : (x+a) (x+b) (x+c) (x+d)=m (Trong đó a+d=b+c)

cách giải : Nhóm (x+a) với (x+d) ; (x+b) với (x+c) rồi triển khai các tích đó

Khi đó phương trình có dạng

$[x^2 +(a+d)x +ad] [x^2 + (b+c)x +bc] =0$

Do a+d=b+c nên ta đặt $[x^2 +(a+d)x + k] =t$ (2) (k có thể là ad hoặc bc)

Ta có phương trình $At^2 +B t + C =0$ (Với A=1)

Giải phương trình ta tìm được t sau đó thay vào (2) rồi giá trị tìm được nghiệm x

Giải phương trình (x+1) (x+3) (x+5) (x+7) = -15 (1)

- nhận xét 1+7 =3+5
- Nhóm hợp lý $\Leftrightarrow$ (x+1) (x+7) . (x+3) (x+5) +15=0

$\Leftrightarrow (x^2 +8x +7) (x^2 + 8x + 15) +15 =0$ (2)

*Đặt $(x^2 +8x +7) =t$ (3) thay vào (2) ta có (2) $\Leftrightarrow$ t(t+ 8) + 15=0

$\Leftrightarrow y^2 +8y +15 =0$ nghiệm $y_1=-3$; $y_2=-5$

Thay vào (3) ta được 2 phương trình

1/ $x^2 +8x +7 = -3 \Leftrightarrow x^2+ 8x +10=0$ có nghiệm $x_{1,2} = -4\pm \sqrt{6}$

2/ $x^2 +8x +7 = -5 \Leftrightarrow x^2 +8x +12 = 0$ có nghiệm $x_3=-2$; $x_4 =-6$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-2;-6;-4\pm\sqrt{6}\}$

Bài 4.6:Phương trình dạng; $(x+a)^4 +(x+b)^4 = c$ (1) (Trong đó x là ẩn số ;a, b, c là các hệ số)

cách giải :

Đối với dạng phương trình này ta đặt ẩn phụ là trung bình cộng của (x+a) và (x+b)

Đặt $t =x+\frac{a+b}{2}$ => $x+a =t+\frac{a-b}{2}$ và $x+b=t - \frac{a-b}{2}$

Khi đó phương trình (1) trở thành : $2t^4 +2 (\frac{a+b}{2})^2 t^2 + 2(\frac{a+b}{2})^4 -c =0$

Đây là phương trình trùng phương đã biết cách giải

Giải phương trình sau : $(x+3)^4 +(x-1)^4 =626$

Đặt t =(x+3+x-1): 2=x+1=>x=t-1

Ta có phương trình $\Leftrightarrow (t+2)^4 + (t - 2)^4 =626$

$\Leftrightarrow 9t^4+8t^3 +24t^2+32t +16) +(\Leftrightarrow 9t^4- 8t^3 +24t^2- 32t +16)=626$

$\Leftrightarrow t^4 +24t^2 - 297 =0$ => t=-3 và t=3

Từ đó tìm được x=2 ; và x=-4 là nghiệm của phương trình đã cho

Bài 4.7/ Phương trình dạng : $a[f(x)]^2 +b f(x) +c = 0$

(trong đó x là ẩn ;$a\neq 0$; f(x) là đa thức một biến)

cách giải: - Tìm TXĐ của phương trình

- Đổi biến bằng cách đặt f(x) =t khi ó phương trình có dạng $at^2 + bt +c =0$ (2) là PT bậc ha +/nếu (2) có nghiệm là $t=t_0$ thì ta sẽ giải tiếp phương trình f(x) =t

+/ nghiệm của phương trình $f(x) =t_0$ (nếu thoả mãn TXĐ của phương trình đã cho) sẽ là nghiệm của phương trnh (1)

Ví dụ : Giải phương trình $x^4+6x^3+5x^2-12x+3=0$ (1)

TXĐ : $\forall\ x\notin R$

Biến đổi vế trái ta có $VT= (x^2+ 3x)^2 -4(x^2+3x) +3$

Vậy ta có phương trình <=> $(x^2+ 3x)^2 -4(x^2+3x) +3 =0$

Đặt $x^2+ 3x =t$ (2)

Ta có PT <=> $t^2 -4t +3 = 0$ có nghiệm là $t_1=1$;$t_2=3$

Bài 4.8 Phương trình đối xứng bậc lẻ (bậc 5)

Giải phương trình **$2x^5 +3x^4 -5x^3 -5x^2 + 3x +2=0$**

Phương trình có tổng các hệ số của các số hạng bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các số hạng bậc lẻ , có nghiệm x=- 1 .Nên biến đổi phương trình về dạng

$(x+1) (2x^4+x^3 -6x^2+x+2)=0$

Khi đó phương trình có dạng

$[x^2 +(a+d)x +ad] [x^2 + (b+c)x +bc] =0$

Do a+d=b+c nên ta đặt $[x^2 +(a+d)x + k] =t$ (2) (k có thể là ad hoặc bc)

Ta có phương trình $At^2 +B t + C =0$ (Với A=1)

Giải phương trình ta tìm được t sau đó thay vào (2) rồi giá trị tìm được nghiệm x

Giải phương trình (x+1) (x+3) (x+5) (x+7) = -15 (1)

- nhận xét 1+7 =3+5
- Nhóm hợp lý $\Leftrightarrow$ (x+1) (x+7) . (x+3) (x+5) +15=0

$\Leftrightarrow (x^2 +8x +7) (x^2 + 8x + 15) +15 =0$ (2)

*Đặt $(x^2 +8x +7) =t$ (3) thay vào (2) ta có (2) $\Leftrightarrow$ t(t+ 8) + 15=0

$\Leftrightarrow y^2 +8y +15 =0$ nghiệm $y_1=-3$; $y_2=-5$

Thay vào (3) ta được 2 phương trình

1/ $x^2 +8x +7 = -3 \Leftrightarrow x^2+ 8x +10=0$ có nghiệm $x_{1,2} = -4\pm\sqrt{6}$

2/ $x^2 +8x +7 = -5 \Leftrightarrow x^2 +8x +12 = 0$ có nghiệm $x_3=-2$; $x_4 =-6$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-2;-6;-4\pm\sqrt{6}\}$

<u>Bài 4.6:</u>Phương trình dạng; $(x+a)^4 +(x+b)^4 = c$ (1) (Trong đó x là ẩn số ;a, b, c là các hệ số)

cách giải :

Đối với dạng phương trình này ta đặt ẩn phụ là trung bình cộng của (x+a) và (x+b)

Đặt $t =x+\frac{a+b}{2}$ => $x+a =t+\frac{a-b}{2}$ và $x+b=t - \frac{a-b}{2}$

Khi đó phương trình (1) trở thành : $2t^4 +2 (\frac{a+b}{2})^2 t^2 + 2(\frac{a+b}{2})^4 -c =0$

Đây là phương trình trùng phương đã biết cách giải

Giải phương trình sau : $(x+3)^4 +(x-1)^4 =626$

Đặt t =(x+3+x-1): 2=x+1=>x=t-1

Ta có phương trình $\Leftrightarrow (t+2)^4 + (t - 2)^4 =626$

$\Leftrightarrow 9t^4+8t^3 +24t^2+32t +16) +(\Leftrightarrow 9t^4- 8t^3 +24t^2- 32t +16)=626$

$\Leftrightarrow t^4 +24t^2 - 297 =0$ => t=-3 và t=3

Từ đó tìm được x=2 ; và x=-4 là nghiệm của phương trình đã cho

<u>Bài 4.7</u>/ Phương trình dạng : $a[f(x)]^2 +b f(x) +c = 0$

(trong đó x là ẩn ;$a\neq 0$; f(x) là đa thức một biến)

<u>cách giải:</u> - Tìm TXĐ của phương trình

- Đổi biến bằng cách đặt f(x) =t khi ó phương trình có dạng $at^2 + bt +c =0$ (2) là PT bậc ha +/nếu (2) có nghiệm là $t=t_0$ thì ta sẽ giải tiếp phương trình f(x) =t

+/ nghiệm của phương trình $f(x) =t_0$ (nếu thoả mãn TXĐ của phương trình đã cho) sẽ là nghiệm của phương trnh (1)

Ví dụ : Giải phương trình $x^4+6x^3+5x^2-12x+3=0$ (1)

TXĐ : $\forall\ x\notin R$

Biến đổi vế trái ta có $VT= (x^2+ 3x)^2 -4(x^2+3x) +3$

Vậy ta có phương trình <=> $(x^2+ 3x)^2 -4(x^2+3x) +3 =0$

Đặt $x^2+ 3x =t$ (2)

Ta có PT <=> $t^2 -4t +3 = 0$ có nghiệm là $t_1=1$;$t_2=3$

Bài 4.8 Phương trình đối xứng bậc lẻ (bậc 5)

Giải phương trình **$2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$**

Phương trình có tổng các hệ số của các số hạng bậc chẵn bằng tổng các hệ số của các số hạng bậc lẻ , có nghiệm x=- 1 .Nên biến đổi phương trình về dạng

$$(x+1)(2x^4+x^3-6x^2+x+2)=0$$

Ngoài nghiệm x=-1 , để tìm nghiệm còn lại ta đi giải phương trình

$2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$(2) là phương trình đối xứng (bậc 4) đã biết cách giải

Giải (2) ta được $x_1 = x_2 = 1$; $x_3 = -2$; $x_4 = -0,5$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x_1 = x_2 = 1$; $x_3 = -2$; $x_4 = -0,5$; $x_5 = -1$

Bài tập VN : Giải các phương trình sau

1) $x^3 - 4x^2 - 29x - 24 = 0$
2) $8x^3 - 20x^2 + 28x - 10 = 0$
3) $x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 27x + 81 = 0$
4, $x^4 - 10x^3 + 11x^2 - 10x + 1 = 0$
5, $x^4 + 5x^3 - 14x^2 - 20x + 16 = 0$
6, $x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 15 = 0$
4, $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8) = 4$
h, $(x+10)(x+12)(x+15)(x+18) = 2x^2$
7) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$ *nhóm $(x+2)(x+12)$ $(x+3)(x+8)$ rồi chia 2 vế cho $4x^2$ và đặt $t = x + 7/x$ (đk $x \neq 0$)*
8) $3x^5 - 10x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 10x + 3 = 0$
9) $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$
10) $6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0$
11) $x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$
12) $(x^2-8x+7)(x^2-8x+15) = 20$
13) $(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)(x^2-9x+20) = -30$ biến đổi <=> $(x^2-3x+1)(x^2-3x-4)(x^2-3x-10) = -30$
14) $3(x^2+x) - 2(x^2+x) - 1 = 0$
15) $(x^2-4x+2)^2 + 4x^2 - 4x - 4 = 0$
16) $(x^2-x+1)^4 - 6x^2(x^2-x+1)^2 + 5x^4 = 0$
17) $(x+6)^4 + (x+4)^4 = 82$
18) $\dfrac{x^2+x-5}{x} + \dfrac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$
19) $(x-2,5)^4 + (x-1,5)^4 = 17$