

**Bài tập lớn số 4:****TÍNH CỘT CHỊU NÉN LỆCH TÂM.**

**Yêu cầu:** cho cột chịu nén lệch tâm bởi lực  $P$  đặt tại điểm  $K$  trên mặt cắt như hình vẽ.

SƠ ĐỒ A: - Vẽ lõi của mặt cắt ngang.

-Vẽ biểu đồ ứng suất cho mặt cắt ngang.

Số liệu:  $P=480$  kN;  $b= 12$  cm;  $h= 27$  cm.

SƠ ĐỒ B: - Xác định lõi của mặt cắt ngang.

- Xác định giá trị của tải trọng cho phép tác dụng lên cột nếu:  $[\sigma]_k = 20$  kN/cm<sup>2</sup>.

$[\sigma]_n = 25$  kN/cm<sup>2</sup>.

-Vẽ biểu đồ ứng suất cho mặt cắt ngang cột với  $[P]$  tìm được.

Số liệu:  $\delta = 1,4$  cm.

Thép góc không đều cạnh: 110x70x8

**SƠ ĐỒ A:**1) Đặc trưng hình học của mặt cắt ngang:

- Chia mặt cắt thành 3 hình: (1) hình chữ nhật  
 (2) hình chữ nhật  
 (3) 2 hình tam giác

$$\text{Ta có: } F_1 = 2b \cdot h/3 = 2 \cdot 12 \cdot 27/3 = 216 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$J_{x1}^{(1)} = \frac{24 \cdot 9^3}{12} = 1458 \text{ cm}^4.$$

$$J_{y1}^{(1)} = J_{y1}^{(c)} = \frac{9 \cdot 24^3}{12} = 10368 \text{ cm}^4.$$

$$F_2 = b/2 \cdot 2h/3 = 12/2 \cdot 2 \cdot 27/3 = 108 \text{ cm}^2$$

$$J_{x2}^{(2)} = \frac{6 \cdot 18^3}{12} = 2816 \text{ cm}^4.$$

$$J_{y2}^{(2)} = J_{y2}^{(c)} = \frac{18 \cdot 6^3}{12} = 324 \text{ cm}^4.$$

$$F_3 = 1/2 \cdot b/4 \cdot 2h/3 = 1/2 \cdot 12/4 \cdot 2 \cdot 27/3 = 13,5 \text{ cm}^2$$

$$J_{x3}^{(3)} = \frac{3 \cdot 18^3}{36} = 486 \text{ cm}^4.$$

$$J_{y3}^{(3)} = \frac{18 \cdot 3^3}{36} = 13,5 \text{ cm}^4.$$

$$\text{Vậy: } F = F_1 + F_2 + 2F_3 = 315 \text{ cm}^2.$$

Xác định trọng tâm C của mặt cắt trong hệ tọa độ  $O_1x_1y_1$ :

Vì mặt cắt có trục y đối xứng  $\Rightarrow x_{1C} = 0$

$$Y_{1C} = \frac{S_{x1}}{F} = \frac{S^{(1)}_{x1} + S^{(2)}_{x1} + S^{(3)}_{x1}}{F}$$

$$= \frac{0 + 108 \cdot (-13,5) + 13,5 \cdot (-10,5)}{351} = -4,56 \text{ cm}$$

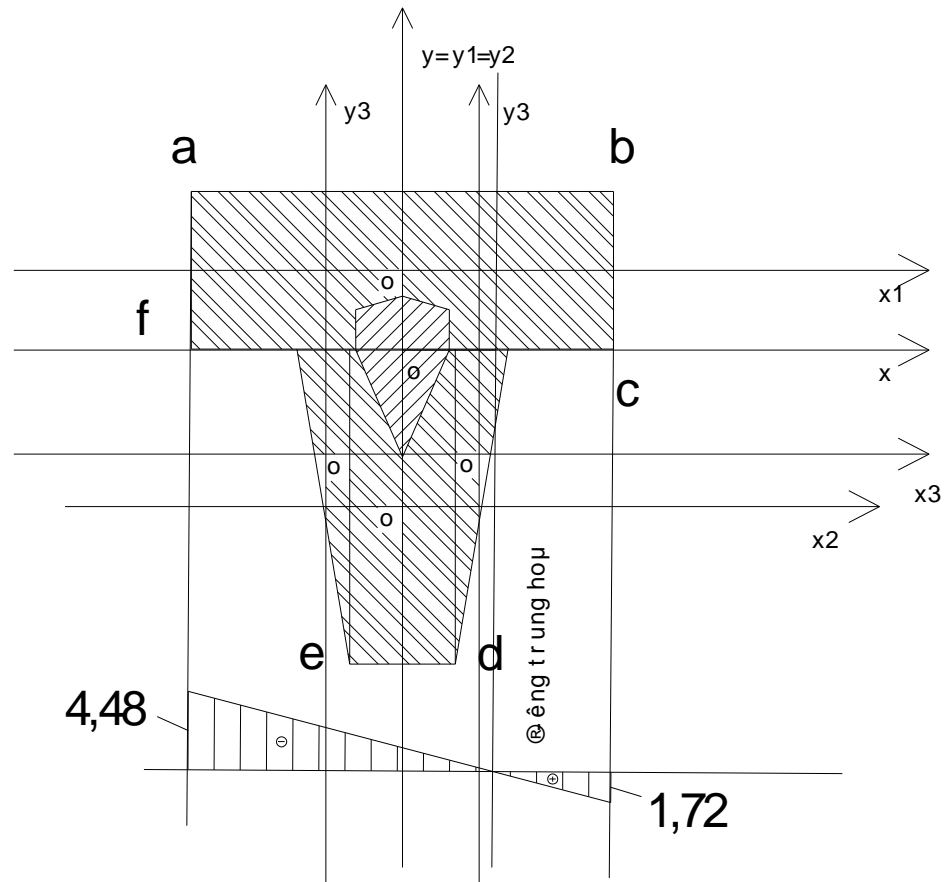
Lập hệ trục quán tính chính trung tâm ( cxy) ta có

$$O_1 : \quad x_1 = 0 \qquad O_2 : \quad x_2 = 0$$

$$Y_1 = 4,56 \text{ cm} \qquad y_2 = -8,84 \text{ cm}$$

$$O_3 : \quad x_3 = \pm 4$$

$$Y_3 = -5,94 \text{ cm}$$



Xác định  $J_x; J_y; i_x^2; i_y^2$ :

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} + 2J_x^{(3)} = J_{x1}^{(1)} + y_1^2 \cdot F_1 + J_{x2}^{(2)} + y_2^2 \cdot F_2 + 2(J_{x3}^{(3)} + y_3^2 F_3)$$

$$= 1458 + 4,56^2 \cdot 216 + 2916 + 8,94^2 \cdot 108 + 2(486 + 5,94^2 \cdot 13,5)$$

$$= 19421,8 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow i_x^2 = J_x / F = \frac{19421,8}{351} = 55,3 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_y^{(1)} + J_y^{(2)} + 2J_y^{(3)} = J_{y1}^{(1)} + J_{y2}^{(2)} + 2(J_{y3}^{(3)} + x_3^2 F_3) \\ &= 10368 + 324 + 2(13,5 + 4^2 \cdot 13,5) = 11151 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i_y^2 = J_y / F = \frac{11151}{351} = 31,8 \text{ cm}^2.$$

### 2) Xác định lõi mắt cắt:

Ta có:  $x_K = -6 \text{ cm}$

$$Y_K = 0,06 \text{ cm}$$

\*Cho đường trung hoà trùng với AB ta có :

$$A_1 = \infty ; b_1 = 9,06 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow x_{K1} = 0$$

$$y_{K1} = -i_x^2 / b_2 = -\frac{55,3}{9,06} = -6,1 \text{ cm}.$$

\*Cho đường trung hoà trùng với BC ta có:  $a_2 = 12 \text{ cm}; b_2 = \infty$

$$\Rightarrow x_{K2} = -i_y^2 / a_2 = -\frac{31,8}{12} = -2,65 \text{ cm}$$

$$y_{K2} = 0$$

Do tính đối xứng nên :

- Khi đường trung hoà trùng với AF thì :  $K_2' (2,65; 0)$ .

\*Cho đường trung hoà trùng với CD ta có :

$$a_3 = 12 - 0,06 \cdot \frac{9}{18} = 11,97 \text{ cm}$$

$$b_3 = -18 + 0,06 - 3 \cdot \frac{18}{9} = -23,94 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow x_{K3} = -i_y^2 / a_2 = -\frac{31,8}{11,97} = -2,66 \text{ cm}$$

$$y_{K3} = -i_x^2 / b_2 = -\frac{55,3}{-23,94} = 2,31 \text{ cm}$$

Do tính đối xứng nên :

- Khi đường trung hoà trùng với EF thì :  $K_3'$  (2,66; -2,31).

\*Cho đường trung hoà trùng với DE ta có:  $a_4 = \infty$  ;  $b_4 = -17,94 \text{ cm}$ .

$$\Rightarrow x_{K1} = 0$$

$$y_{K1} = -i_x^2 / b_2 = -\frac{55,3}{-17,94} = 3,08 \text{ cm}$$

Nối các điểm  $K_i$  vừa tìm được ta có chu vi lõi của mặt cắt như hình vẽ.

### 3) Vẽ biểu đồ ( $\sigma_z$ ):

Xác định vị trí đường trung hoà:

Ta có:  $x_K = -6 \text{ cm}$

$$y_K = 0,06 \text{ cm}$$

Vậy:  $a = -i_y^2 / x_K = -\frac{31,8}{-6} = 5,3 \text{ cm}$

$$b = -i_x^2 / y_K = -\frac{55,3}{0,06} = -921,6 \text{ cm}$$

Phương trình đường trung hoà là:  $\frac{x}{5,3} + \frac{y}{-921,6} = 1$

Từ đó ta vẽ được đường trung hoà như hình vẽ.

Tính  $\sigma_{\max}$  ,  $\sigma_{\min}$  :

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{y_K y_A}{i_x^2} + \frac{x_K x_A}{i_y^2} \right) = -\frac{480}{351} \left( 1 + \frac{0,06 \cdot 9,06}{55,3} + \frac{-6 \cdot (-12)}{31,8} \right) \\ &= -4,48 = \sigma_{\min}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_C &= \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{y_K y_C}{i_x^2} + \frac{x_K x_C}{i_y^2} \right) = -\frac{480}{351} \left( 1 + \frac{0,06 \cdot 0,06}{55,3} + \frac{-6 \cdot 12}{31,8} \right) \\ &= 1,73 = \sigma_{\max}\end{aligned}$$

**SƠ ĐỒ B:**

**1) Đặc trưng hình học của mặt cắt ngang:**

Tra bảng: thép góc không đều cạnh 110x70x8 có:

$$B = 11 \text{ cm}; \quad b = 7 \text{ cm}; \quad J_x = 54,6 \text{ cm}^4; \quad J_y = 172 \text{ cm}^4.$$

$$F = 13,9 \text{ cm}^2; \quad x_0 = 3,61 \text{ cm}; \quad y_0 = 1,64 \text{ cm}.$$

Mặt cắt có 2 trục đối xứng x,y  $\Rightarrow$  oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm. Chia mặt cắt thành 3 hình:

(1) hình chữ nhật

(2) hình chữ nhật

(3) 4 mặt cắt của thép góc không đều cạnh.

$$\text{Ta có: } F_1 = 1,4 \cdot (3 \cdot 1,4 + 2 \cdot 7) = 25,48 \text{ ( cm}^2\text{)}$$

$$J_{x1}^{(1)} = \frac{1,4 \cdot 18,2^3}{12} = 703,33 \text{ cm}^4.$$

$$J_{y1}^{(1)} = \frac{18,2 \cdot 1,4^3}{12} = 4,16 \text{ cm}^4.$$

$$F_2 = (11 + 0,7) \cdot 1,4 = 16,38 \text{ cm}^2$$

$$J_{x_2}^{(2)} = \frac{11,7 \cdot 1,4^3}{12} = 2,68 \text{ cm}^4.$$

$$J_{y_2}^{(2)} = \frac{1,4 \cdot 11,7^3}{12} = 186,85 \text{ cm}^4.$$

$$\text{Vậy: } F = F_1 + 2F_2 + 4F_3 = 25,48 + 2 \cdot 16,38 + 4 \cdot 13,9 = 113,84 \text{ cm}^2.$$

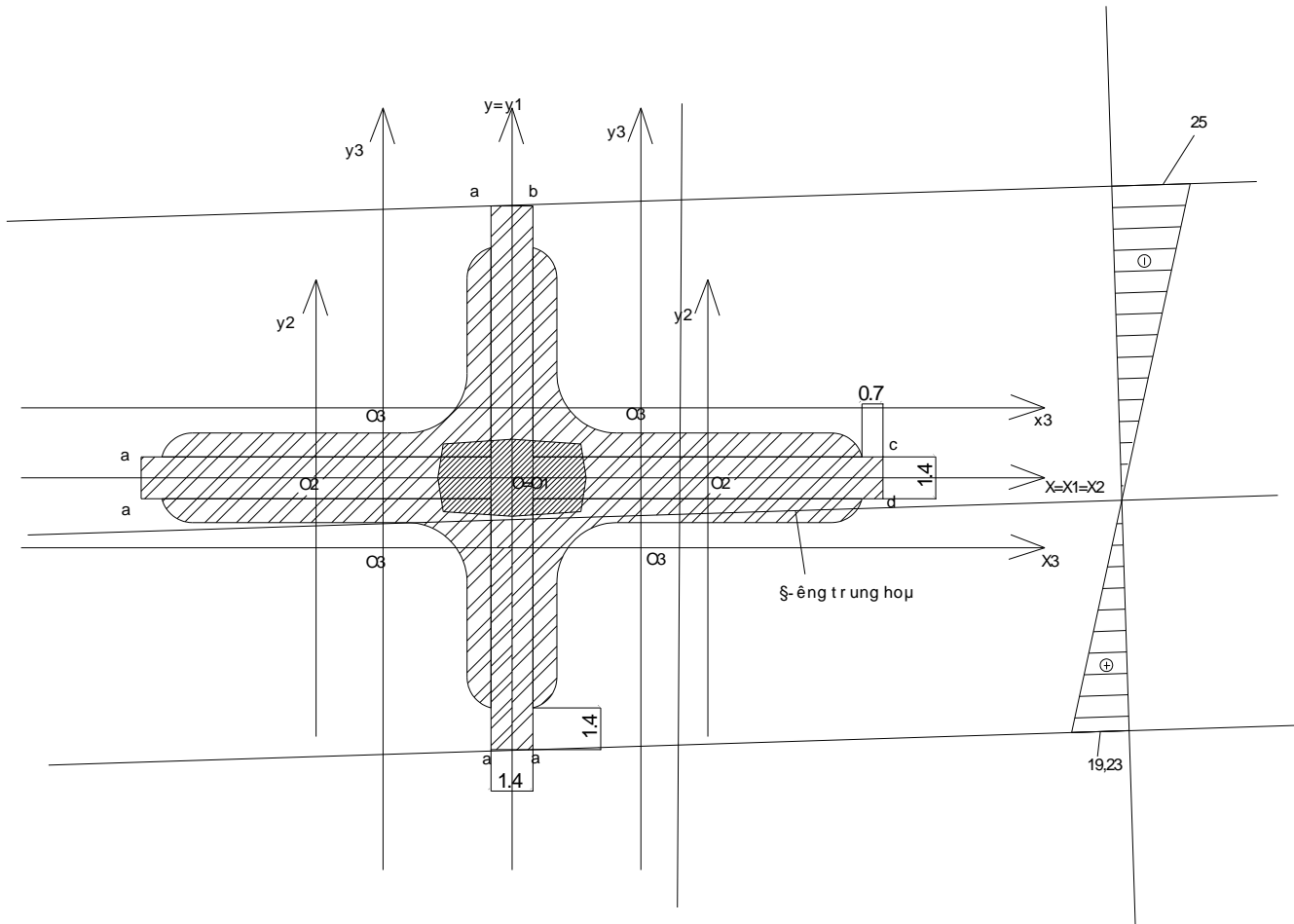
Xác định  $J_x$ ;  $J_y$ ;  $i_x^2$ ;  $i_y^2$ :

$$\begin{aligned} J_x &= J_x^{(1)} + 2J_x^{(2)} + 4J_x^{(3)} = J_{x_1}^{(1)} + 2J_{x_2}^{(2)} + 4(J_{x_3}^{(3)} + y_3^2 F_3) \\ &= 703,33 + 2 \cdot 2,68 + 4(54,6 + 2,34^2 \cdot 13,9) = 1231,53 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i_x^2 = J_x / F = \frac{1231,53}{113,84} = 10,82 \text{ cm}^2.$$

$$\begin{aligned} J_y &= J_y^{(1)} + 2J_y^{(2)} + 4J_y^{(3)} = J_{y_1}^{(1)} + 2(J_{y_2}^{(2)} + x_2^2 \cdot F_2) + 4(J_{y_3}^{(3)} + x_3^2 F_3) \\ &= 4,16 + 2(186,85 + 6,55^2 \cdot 16,38) + 4(172 + 4,31^2 \cdot 13,9) = 3504,18 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i_y^2 = J_y / F = \frac{3504,18}{113,84} = 30,78 \text{ cm}^2.$$



**2) xác định lõi của mặt cắt ngang:**

\*Cho đường trung hoà trùng AB:  $a_1 = \infty$  ;  $b_1 = 8,4$  cm

$$\Rightarrow x_{K1} = 0$$

$$y_{K1} = -i_x^2 / b_1 = -\frac{10,82}{8,4} = -1,29 \text{ cm}$$

Do tính chất đối xứng nên:

- Khi cho đường trung hoà trùng với FE có  $K_1'$  ( 0; 1,29).

\*Cho đường trung hoà trùng với BC ta có:

$$a_2 = ( 0,7 + 11 + 0,7 ) + 0,7 \cdot 11,7 / 8,4 = 13,375 \text{ cm},$$

$$b_2 = ( 0,7 + 8,4 + ) + 0,7 \cdot 8,4 / 11,7 = 9,6 \text{ cm}$$



$$\Rightarrow x_{K_2} = -i_y^2 / a_2 = -\frac{30,78}{13,375} = -2,3 \text{ cm}$$

$$y_{K_2} = -i_x^2 / b_2 = -\frac{10,82}{9,6} = -1,13 \text{ cm}$$

vậy:  $K_2(-2,3; -1,13)$

Do tính đối xứng nên ta có:

- Khi cho đường trung hoà trùng với DE có :  $K_2'(-2,3 ; 1,13)$ .

- Khi cho đường trung hoà trùng với HA có :  $K_2''(2,3 ; -1,13)$ .

- Khi cho đường trung hoà trùng với GF có :  $K_2'(2,3 ; 1,13)$ .

\*Cho đường trung hoà trùng với CD ta có:

$$A_3 = 12,4 \text{ cm}, \quad b_3 = \infty$$

$$\Rightarrow x_{K_3} = -i_x^2 / a_3 = -\frac{30,78}{12,4} = -2,48 \text{ cm}$$

$$Y_{K_3} = 0 .$$

Do tính đối xứng nên ta có:

- Khi cho đường trung hoà trùng với GH có :  $K_3'(2,48 ; 0)$ .

Nội các điểm  $K_i$  vừa tìm được ta có chu vi lõi của mặt cắt.

### 3) Xác định vị trí đường trung hoà:

Ta có:  $x_k = -0,7 \text{ cm}$  ,  $y_k = 7,7 \text{ cm}$

$$\text{Vậy: } a = -i_y^2 / x_K = -\frac{30,78}{-0,7} = 43,97 \text{ cm}$$

$$b = -i_x^2 / y_K = -\frac{10,82}{7,7} = -1,4 \text{ cm}$$

Phương trình đường trung hoà là:  $\frac{x}{43,97} + \frac{y}{-1,4} = 1$

Từ đó ta vẽ được đường trung hoà như hình vẽ.

Từ hình vẽ ta thấy các điểm A và E xa đường trung hoà nhất nên ứng suất tại các điểm này sẽ đạt giá trị lớn nhất và bé nhất trên mặt cắt.

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{y_K y_A}{i_x^2} + \frac{x_K x_A}{i_y^2} \right) = -\frac{P}{113,84} \left( 1 + \frac{7,7 \cdot 9,1}{10,82} + \frac{-0,7 \cdot (-0,7)}{30,78} \right) \\ &= -0,0624P = \sigma_{\min}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_E &= \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{y_K y_E}{i_x^2} + \frac{x_K x_E}{i_y^2} \right) = -\frac{P}{113,84} \left( 1 + \frac{7,7 \cdot (-9,1)}{10,82} + \frac{-0,7 \cdot (-0,7)}{30,78} \right) \\ &= 0,048P = \sigma_{\max}\end{aligned}$$

Xác định [P]:

$$\sigma_{\max} = 0,048P \leq [\sigma]_k = 20 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\Rightarrow [P]_1 = \frac{20}{0,048} = 416,67 \text{ kN}$$

$$\sigma_{\max} = 0,0624P \leq [\sigma]_n = 25 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\Rightarrow [P]_1 = \frac{25}{0,0624} = 400,64 \text{ kN}.$$

4) Vẽ biểu đồ ứng suất ( $\sigma_z$ ):

Với [P] đã tìm được thì trị số  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  sẽ là:

$$\sigma_{\max} = 0,048[P] = 0,048 \cdot 400,64 = 19,23 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\min} = 0,0624[P] = 0,0624 \cdot 400,64 = 25 \text{ kN/cm}^2$$

Ta có biểu đồ ứng suất như hình vẽ