

## SƠ LƯỢC VỀ PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

Bằng cách đưa vào mặt phẳng một hệ trục tọa độ, mỗi vectơ, mỗi điểm trên mặt phẳng đó đều được xác định bởi một tọa độ xác định. Khi đó chúng ta có thể chuyển nhiều bài toán hình học sang bài toán đại số và ngược lại, từ kết quả của đại số suy ra được một số tính chất và mối quan hệ giữa các hình hình học.

Nội dung chính

- Phương trình tổng quát của đường thẳng
- Phương trình tham số của đường thẳng
- Khoảng cách và góc
- Đường tròn
- Đường elip
- Đường hyperbol
- Đường parabol
- Ba đường conic

## CÁC MỨC ĐỘ NHẬN THỨC THEO BLOOM

### I. Nhận biết

#### 1. Kiến thức và thông tin

Trong phần này, học sinh được đòi hỏi chỉ cần gọi ra được định nghĩa, công thức, khái niệm và các thuật ngữ, kí hiệu của các bài trong chương mà chưa cần phải hiểu.

Cụ thể như sau

- Phương trình tổng quát của đường thẳng, học sinh chỉ cần gọi ra được các yếu tố sau: định nghĩa vectơ pháp tuyến của đường thẳng, phương trình tổng quát của đường thẳng, phương trình đường thẳng theo đoạn chắn và vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.
- Phương trình tham số của đường thẳng, học sinh cần gọi được các yếu tố sau: định nghĩa vectơ chỉ phương của đường thẳng, phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng.

- Khoảng cách và góc, học sinh chỉ cần gọi ra được: công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, định nghĩa góc giữa hai đường thẳng.
- Đường tròn, học sinh chỉ cần gọi ra được: phương trình của đường tròn, nhận dạng phương trình đường tròn và khái niệm tiếp tuyến của đường tròn.

- Đường elip, học sinh chỉ cần gọi ra được: định nghĩa đường elip, nêu được dạng phương trình chính tắc của elip, các yếu tố của elip.
- Đường hyperbol, học sinh chỉ cần gọi ra được: định nghĩa đường hyperbol, nêu được dạng phương trình chính tắc và hình dạng của hyperbol.
- Đường parabol: định nghĩa đường parabol và nêu được dạng phương trình chính tắc của parabol.

Trong phần này, kiến thức của học sinh chỉ khả năng lập lại chứ không phải để sử dụng. Sau khi học xong “Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng” học sinh phải có khả năng để:

- Phát biểu được định nghĩa vector pháp tuyến và vector chỉ phương của đường thẳng.
- Nêu được phương trình tham số và phương trình tổng quát của một đường thẳng bất kì.
- Định nghĩa góc giữa hai đường thẳng và khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.
- Phát biểu được định nghĩa đường elip, hyperbol và parabol, nêu được phương trình chính tắc của chúng và các yếu tố liên quan.

### Một số ví dụ kiểm tra kiến thức

**Ví dụ 1.** Đường thẳng  $2x + y - 1 = 0$  có vector pháp tuyến là vector nào sau đây ?

A.  $\vec{n} = (2, -1)$

C.  $\vec{n} = (1, -1)$

B.  $\vec{n} = (2, 1)$

D.  $\vec{n} = (-1, 2)$

Đáp án: B

Phân tích: Ví dụ này giúp học sinh nhận biết được vector pháp tuyến của một đường thẳng thông qua phương trình tổng quát của nó. Để làm được ví dụ này học sinh phải định nghĩa vector pháp tuyến và phương trình tổng quát của đường thẳng, học sinh chỉ cần nhớ lại cách xác định vector pháp tuyến từ phương trình tổng quát của đường thẳng rồi thực hiện chứ chưa cần phải hiểu rõ vấn đề.

**Ví dụ 2.** Phương trình  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  là phương trình chính tắc của đường nào ?

A. Elip với trục lớn bằng  $2a$ , trục bé bằng  $2b$ .

B. Hyperbol với trục lớn bằng  $2a$ , trục bé bằng  $2b$ .

C. Parabol với trục lớn bằng  $2a$ , trục bé bằng  $2b$ .

D. Hyperbol với trục thực bằng  $2a$  , trục ảo bằng  $2b$  .

Đáp án: D

Phân tích: Ví dụ đòi hỏi học sinh nhận biết phương trình chính tắc nên chỉ cần học sinh nhớ lại phương trình chính tắc của các đường elip, hyperbol, parabol và các yếu tố liên quan mà không cần học sinh phải hiểu rõ ràng. Thông qua ví dụ này giúp học sinh phần nào nắm chắc được phương trình chính tắc của các đường trên.

## 2. Kỹ thuật và kỹ năng

Mục tiêu của phần này bao gồm việc sử dụng các thuật toán như là các kỹ năng, thao tác và khả năng thực hiện trực tiếp các phép tính, những đơn giản hóa và các lời giải tương tự các ví dụ học sinh đã gặp trong lớp mặc dù có khác về chi tiết. Đối với phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, học sinh phải biết vận dụng các kỹ thuật hoặc các công thức, quy tắc đã học để giải quyết vấn đề.

Cụ thể, khi học xong phần này học sinh phải có khả năng để:

- Viết được phương trình tham số và tổng quát của đường thẳng dựa vào các yếu tố đã biết.
- Tính được khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng và góc giữa hai đường thẳng.
- Viết được phương trình đường tròn và phương trình tiếp tuyến của nó.
- Viết được phương trình chính tắc của elip, hyperbol và parabol khi biết các yếu tố cho trước và xác định các yếu tố của  $(E)$  ,  $(H)$  và  $(P)$  khi biết phương trình chính tắc của chúng.

### Một số ví dụ kiểm tra kỹ năng

**Ví dụ 1.** Phương trình nào là phương trình tham số của đường thẳng  $x - y + 3 = 0$  ?

A.  $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases}$

C.  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$

D.  $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$

Đáp án: A

Phân tích: Ví dụ nói lên mối liên hệ giữa phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng. Để thực hiện được ví dụ này học sinh chỉ cần nhớ lại cách xác định phương trình tham số của đường thẳng rồi kết hợp với vài kỹ thuật nhỏ.

**Ví dụ 2.** Cho elip  $(E) : 9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ . Mệnh đề nào sau đây là sai ?

- A. Các tiêu điểm của  $(E)$  là  $F_1(-\sqrt{7}, 0), F_2(\sqrt{7}, 0)$ .
- B. Độ dài các trục  $2a = 8, 2b = 6$ .
- C. Tâm sai của  $(E)$  là  $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$ .
- D. Độ dài các trục của  $(E)$  là  $2a = 4, 2b = 3$ .

Đáp án: D

Phân tích: Để giải quyết ví dụ này học sinh phải nhận biết được phương trình chính tắc của elip rồi từ đó sử dụng những công thức đã học để giải quyết.

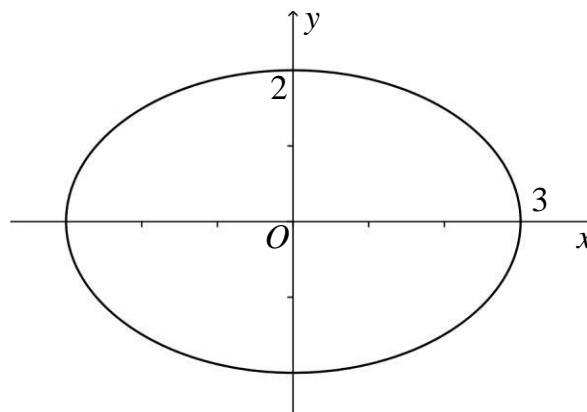
## II. Thông hiểu

Cuối phần này học sinh có thể:

- Viết phương trình để biểu thị một đồ thị đã cho trong mặt phẳng tọa độ.
- Xác định được điều kiện tương ứng trong các mối quan hệ giữa đường thẳng với đường tròn, đường thẳng với đường thẳng,...
- Giải các bài toán trong mặt phẳng bằng phương pháp tọa độ.
- Xác định và hiểu được yêu cầu của bài toán, lập luận suy diễn từ các dữ kiện đã cho.
- Phân biệt được các loại phương trình đường thẳng, đường tròn,...

### Một số ví dụ kiểm tra

**Ví dụ 1.** Elip trong hình vẽ sau có phương trình là ?



- |  |  |
|--|--|
| A. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ | C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ |
| B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ | D. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$   |

Đáp án: B



$$C. x^2 + y^2 - 4x - 2\sqrt{3}y + 4 = 0$$

$$D. x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$$

Phân tích: Để xác định phương trình đường tròn ta phải biết tâm và bán kính. Tuy nhiên, các yếu tố đó không cho sẵn mà phải tìm thông qua các ràng buộc, nên đây là tình huống mới.

Đáp án đúng: A

Đáp án gây nhiễu

C: là phương trình đường tròn qua B

D: là phương trình đường tròn qua C

B: là phương trình đường tròn có cùng tâm với phương trình đường tròn ở A

**Ví dụ 2.** Cho đường thẳng  $\Delta : x - y = 0$ ,  $M(2,1)$ . Viết phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta'$  đối xứng với  $\Delta$  qua  $M$ .

Phân tích: Phương trình của  $\Delta'$  có dạng  $ax + by + c = 0$ . Các yếu tố  $a, b, c$  không cho sẵn mà phải tìm thông qua những mối liên hệ với các đối tượng khác, nên đây là tình huống mới.

- Vì  $\Delta'$  cùng phương với  $\Delta$  nên  $a=1$  và  $b=-1$ .

- Khoảng cách  $d(M, \Delta) = d(M, \Delta')$  hay  $|1| = |1 + c|$ . Suy ra  $c = 0$  hoặc  $c = -2$ . Vì

$\Delta$  khác  $\Delta'$  nên  $c = -2$ .

- Vậy  $\Delta' : x - y - 2 = 0$ .

Bài này có thể làm theo hướng tìm vectơ pháp tuyến của  $\Delta'$  và một điểm thuộc  $\Delta'$ .

**Ví dụ 3.** Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ và đi qua  $A(2,1)$ ?

Phân tích: Bằng các phương pháp đã được dạy, học sinh không thể viết được phương trình đường tròn ngay được.

- Ta cần tìm tọa độ của tâm và bán kính.

- Theo giả thiết ta suy ra: nếu bán kính là  $a$  thì tọa độ tâm là  $(a, a)$ .

-  $A$  thuộc đường tròn  $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$  suy ra  $a = 1$  hoặc  $a = 5$ .

- Kết luận:  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ,  $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$ .

#### IV. Những khả năng bậc cao

Đây là một phạm trù rất rộng, bao gồm các phạm trù con là phân tích, tổng hợp và đánh giá. Cụ thể những khả năng bậc cao của học sinh:

- Từ những tính chất cơ bản đã được học, các em rút ra cho mình những tính chất hay quan hệ khác.
- Sự khôn khéo, thông minh, sáng tạo trong giải toán.
- Khả năng phân tích bài toán và tổng hợp các kết quả thu được để kết luận bài toán.
- Phát hiện ra những sai lầm trong lập luận.
- Trừu tượng hóa, ký hiệu hóa, tổng quát hóa trong cùng một bài toán.

Sau khi học xong “Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng”, học sinh có thể

- Dựa vào phương pháp tọa độ và một chút khôn khéo, sáng tạo học sinh có thể đưa ra kết luận cho một bài toán mà không cần phải thực hiện quá nhiều phép tính.
- Dựa vào tọa độ hay phương trình học sinh có thể tưởng tượng được vị trí tương đối giữa các điểm hay đường trong mặt phẳng tọa độ.
- Khả năng tư duy mà người ta gọi là “cách nhìn” trong toán học thông qua tọa độ.

#### Một số ví dụ kiểm tra khả năng bậc cao của học sinh

##### Ví dụ 1

Tùy theo  $m$ , xét vị trí tương đối của đường tròn ( $C$ ) và đường thẳng  $\Delta$  sau đây

$$(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

$$\Delta : 3x + y + m = 0$$

Phân tích:

Đường tròn trên có tâm  $I(2, -1)$ , bán kính  $R = 2$ .

Để giải bài toán này học sinh cần biện luận theo  $m$  các vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn. Cụ thể, đầu tiên học sinh cần tính  $d(I, \Delta)$ , rồi sau đó biện luận theo các trường hợp

$d(I, \Delta) = 2$  : Đường thẳng tiếp xúc đường tròn.

$d(I, \Delta) > 2$  : Đường thẳng và đường tròn không có điểm chung.

$d(I, \Delta) < 2$  : Đường thẳng cắt đường tròn.

Từ đó để ra các giá trị của  $m$  tương ứng với từng trường hợp.

Kết luận

Đường thẳng tiếp xúc đường tròn khi  $m = 2\sqrt{10} - 5$  hoặc  $m = -2\sqrt{10} - 5$ .



Đường thẳng và đường tròn không có điểm chung khi  $m > 2\sqrt{10} - 5$  hoặc  $m < -2\sqrt{10} - 5$ .

Đường thẳng cắt đường tròn khi  $-2\sqrt{10} - 5 < m < 2\sqrt{10} - 5$ .

### Ví dụ 2

Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai đường thẳng  $x + y - 2 = 0$ ,  $x - 2 = 0$  biết đường tròn đi qua điểm  $A(0,2)$  và nằm trong góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng trên.

Phân tích:

Để giải bài toán này, học sinh cần chia nhỏ bài toán ra từng phần

Đầu tiên là viết phương trình các đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng trên, xét xem đường phân giác nào là đường phân giác góc nhọn dựa vào tích vô hướng của hai vector pháp.

Đường tròn có tâm nằm trên đường phân giác và qua điểm  $A(0,2)$ , từ đó giải ra phương trình đường tròn.