

Bài tập Xác suất thống kê (Có đáp án)

Câu 1.

Lần I rút 2 lá bài trong bộ bài 52 lá để trên bàn. Lần II rút thêm 2 lá nữa để trên bàn. Sau đó khoanh NN 2 lá. X là số lá cơ có trong 2 lá khoanh sau cùng.

a/ Tìm phân phối XS của X

b/ Tính XS trong 2 lá đó chỉ có 1 con cơ.

Giải

Thực chất rút 2 lần (2 lá, 2 lá) thì tương đương với rút 1 lần 4 lá.

Gọi A_j là biến cố trong 4 lá có j lá cơ. $A_j = 0, 1, 2, 3, 4$ $j=0, 1, 2, 3, 4$, hệ A_j là 1 hệ đầy đủ ngoài. Tính $P(A_j)$

$$P(A_0) = \frac{C_0^4 C_{39}^{40}}{C_{52}^4} = \frac{82251}{270725} = \frac{6327}{20825}, \quad P(A_1) = \frac{C_1^4 C_{39}^3}{C_{52}^4} = \frac{118807}{270725} = \frac{9139}{20825},$$

$$P(A_2) = \frac{C_2^4 C_{39}^2}{C_{52}^4} = \frac{57798}{270725} = \frac{4446}{20825}, \quad P(A_3) = \frac{C_3^4 C_{39}^1}{C_{52}^4} = \frac{11154}{270725} = \frac{858}{20825},$$

$$P(A_4) = \frac{C_4^4 C_{39}^0}{C_{52}^4} = \frac{715}{270725} = \frac{55}{20825}, \quad P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 1$$

a/ Tìm phân phối XS của $X = 0, 1, 2$. Bây giờ có 4 lá bài trên bàn, rút 2 trong 4 lá. Với $X = k = 0$,

$$P(X=0) = P(A_0)P_{\bar{e}}^{eX=0} + P(A_1)P_{\bar{e}}^{eX=0} + P(A_2)P_{\bar{e}}^{eX=0} + P(A_3)P_{\bar{e}}^{eX=0} + P(A_4)P_{\bar{e}}^{eX=0}$$

$$P_{\bar{e}}^{eX=0} = P_{\bar{e}}^{A_0} = \frac{C_4^0}{C_4^2} = 1, \quad P_{\bar{e}}^{eX=0} = P_{\bar{e}}^{A_1} = \frac{C_3^1}{C_4^2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P_{\bar{e}}^{eX=0} = P_{\bar{e}}^{A_2} = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}, \quad P_{\bar{e}}^{eX=0} = P_{\bar{e}}^{A_3} = 0, \quad P_{\bar{e}}^{eX=0} = P_{\bar{e}}^{A_4} = 0$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{2} \hat{u}^2 + \binom{4}{3} \hat{u}^3 + \binom{4}{4} \hat{u}^4 + 0 = 0.3038 + 0.2194 + 0.0356 + 0 = 0.5588$$

Vớ i X = k tổng quát,

Do ta xét trong 2 lá rút lần n II có k lá cơ.

$$P_{\hat{e}X=k} = \frac{C_i^k C_{4-i}^{2-k}}{C_4^2}$$

Suy ra

$$P(X=1) = 0 + 0.2194 + 0.1423 + 0.0206 + 0 = 0.3824$$

$$P(X=2) = 0 + 0.0356 + 0.0206 + 0.0206 + 0.0026 = 0.0588$$

$$P(X=3) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0.0$$

$$P(X=4) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0.0$$

Nhận xét: $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$$= 0.5588 + 0.3824 + 0.0588 + 0 + 0 = 1$$

b/ Tính XS trong 2 lá đó chỉ có 1 lá cơ = $P(X=1) = 0.3824$.

BÀI 3

Gọi A_i là biến cố lần n I có i lá cơ, $i = 0, 1, 2$

$$P(A_0) = \frac{C_{13}^0 C_{39}^2}{C_{52}^2} = \frac{741}{1326}$$

$$P(A_1) = \frac{C_{13}^1 C_{39}^1}{C_{52}^2} = \frac{507}{1326}$$

$$P(A_2) = \frac{C_{13}^2 C_{39}^0}{C_{52}^2} = \frac{78}{1326}$$

Gọi B là biến cố lần n II rút được c lá cơ khi lần n I rút 2 lá cơ

$$P\left(\frac{A}{A_2}\right) = \frac{C_{11}^1}{C_{50}^1} = \frac{11}{50}$$

Gọi A là biến cố rút 3 lá cơ

$$P(A) = P(A_2)P\left(\frac{A}{A_2}\right) = \frac{78}{1326} \cdot \frac{11}{50} = \frac{11}{850}$$

b/ B là biến cố rút lần n II có 1 lá cơ với i không gian đầy đủ $A_i, i=0,1,2$

$$P(B) = P(A_0)P\left(\frac{B}{A_0}\right) + P(A_1)P\left(\frac{B}{A_1}\right) + P(A_2)P\left(\frac{B}{A_2}\right)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{C_{13}^1}{C_{50}^1} = \frac{13}{50}$$

$$P(A_1) = \frac{C_{12}^1}{C_{50}^1} = \frac{12}{50}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{C_{11}^1}{C_{50}^1} = \frac{11}{50}$$

$$P(B) = \frac{741}{1326} \times \frac{13}{50} + \frac{507}{1326} \times \frac{12}{50} + \frac{78}{1326} \times \frac{11}{50} = \frac{1}{4} = 0.25$$

c/ Ta tính XS đầy đủ trong

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A_0)P\left(\frac{B}{A_0}\right)}{P(B)} = \frac{741}{1326} \times \frac{13}{50} = 0.581$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{507 \times 12}{1326 \times 50} = 0.367$$

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{78 \times 11}{1326 \times 50} = 0.052$$

$$\text{Kì vọng } M_x = (-1) \times 0.581 + 2 \times 0.367 + 5 \times 0.052 = 0.413$$

Vậy trong trò chơi tôi có lợi.

Bài 4:

Một hộp đựng 5 chai thuốc trong đó có 1 chai giả. người ta lần lượt kiểm tra từng chai cho tới khi phát hiện được chai thuốc giả thì thôi(giả thiết các chai phải qua kiểm tra mới xác định được là thuốc giả hay thật) . Lập luật phân phối xác suất của số chai được kiểm tra.

Bài giải:

X	1	2	3	4	5
P [^]	0.2	0.16	0.128	0.1024	0.4096

$$P[X=1] = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$P[X=2] = P[\bar{A}_1.A_2] = 0,8.0,2 = 0,16$$

$$P[X=3] = P[\bar{A}_1.\bar{A}_2 .A_3] = 0,8.0,8.0,2 = 0,128$$

$$P[X=4] = P[\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cdot A_4] = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,1024$$

$$P[X=5] = P[\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot A_4 \cdot A_5] = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,4096$$

Câu 5:

Ba người cùng làm bài thi. Xác suất làm được c bài của sinh viên A là 0,8; củ a sinh viên B là 0,7; củ a sinh viên C là 0,6. Xác suất để có 2 sinh viên làm được bài.

Bài làm:

Gọi i A, B, C lần n lượt t là xác suấ t làm đượ c bài của 3 sinh viên A, B, C.

D là xác suấ t có 2 sinh viên làm đượ c bài.

$$A=0,8; B=0,7; C=0,6.$$

Ta có:

$$D = (\bar{A} \bar{C} B \bar{C} C) \dot{\cup} (A \bar{C} \bar{B} \bar{C} C) \dot{\cup} (A \bar{C} B \bar{C} C)$$

$$P_{(D)} = P_{(A\bar{C}B\bar{C}C)} + P_{(A\bar{C}\bar{B}\bar{C}C)} + P_{(A\bar{C}B\bar{C}C)}$$

Vì A, B, C độ c lập nên:

$$\begin{aligned} P_{(D)} &= P_{(A)} \cdot P_{(B)} \cdot P_{(C)} + P_{(A)} \cdot P_{(B)} \cdot P_{(C)} + P_{(A)} \cdot P_{(B)} \cdot P_{(C)} \\ &= 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4 \\ &= 0,451. \end{aligned}$$

Vậ y xác suấ t để có 2 sinh viên làm đượ c bài là : 0,451.

Câu 6.

Chia ngẫu nhiên 9 hộp sữ a (trong đó có 3 hộp kém phẩm chất) thành 3 phần bằng nhau. Xác suất để trong mỗi phần đề u có 1 hộ p sữ a kém chất lượng.

Bài Giải

Gọi A_i là họ p thứ i có đúng một sả n phẩm xấu:

$$C = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \quad (\text{với } i = 3)$$

Vậ y xác suấ t để trong mỗ i phầ n đều có mộ t sả n phẩm kém chấ t lượng là:

$$P(C) = P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{C^2 C^1}{C^3} \cdot \frac{C^2 C^1}{C^3} \cdot 1 = \frac{15 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2}{84 \cdot 20} = \frac{9}{28}$$

Bài 7:

Một trò chơi có xác suất thắng mỗi ván là 1/50. Nếu một người chơi 50 ván thì xác suất để người này thắng ít nhất một ván.

Bài giải

Xác suất thắng mỗi ván: $p = \frac{1}{50} = 0.02$

Ta có xác suất để người chơi 50 ván mà không thắng ván nào:

$X \sim B(50, 0.02)$ không thắng

Goi X là số lần thành công trong dãy phép thử Bernoulli:

▷ $P(X = 0) = C_{50}^0 \cdot 0.02^0 \cdot 0.98^{50} = 0.364$

▷ Xác suất để người chơi 50 ván thì thắng ít nhất một ván là:

$$P = 1 - 0.364 = 0.6358$$

Câu 8.

Một phân xưởng có 40 nữ công nhân và 20 nam công nhân. Tỷ lệ tốt nghiệp phổ thông đối với nữ là 15%, với nam là 20%. Chọn ngẫu nhiên 1 công nhân của phân xưởng. Xác suất để chọn được công nhân tốt nghiệp phổ thông trung học

Giải:

Số công nhân của phân xưởng tốt nghiệp phổ thông trung học là:

Đối với nữ: $40 \times 15\% = 6$ người

Đối với nam: $20 \times 20\% = 4$ người

Tổng số công nhân tốt nghiệp phổ thông trung học của phân xưởng là:

$$6 + 4 = 10 \text{ người}$$

Xác suất để chọn được công nhân tốt nghiệp trung học phổ thông là:

$$\frac{C_{10}^1}{C_{60}^1} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

Bài 9

Trong hộp I có 4 bi trắng và 2 bi đen, hộp II có 3 bi trắng và 3 bi đen. Các bi có kích cỡ như nhau chuyển 1 bi từ hộp II sang hộp I, sau đó lấy ngẫu nhiên 1 bi từ hộp I. Xác suất để lấy ra bi trắng.

Giải

Gọi

A_1 : là bi trắng lấy từ hộp II sang hộp I

A_2 : là bi đen lấy từ hộp II sang hộp I

C : lấy viên bi cuối cùng là bi trắng

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(C/A_1) + P(A_2) \cdot P(C/A_2)$$

$$P(A_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(C/A_1) = \frac{3}{7}$$

$$P(C/A_2) = \frac{5}{7}$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

BÀI 10

Gọi A_i là phần i có 1 bi đỏ. A là bc mỗi phần có 1 bi đỏ

$$A = A_1 A_2 A_3 \implies P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P\left(\frac{A_2}{A_1}\right) P\left(\frac{A_3}{A_1 A_2}\right) = \frac{C_1 C^3}{C^{12}} \cdot \frac{C_1 C^3}{C^8} \cdot 1 = 0.285$$

Bài 11:

Một lô hàng do 3 nhà máy I, II, III sản xuất. Tỷ lệ sản phẩm do 3 nhà máy sản xuất lần lượt là 30%, 20%, 50% và tỉ lệ phế phẩm tương ứng là 1%, 2%, 3%. Chọn ngẫu nhiên sản phẩm từ lô hàng. Xác suất để sản phẩm này là phế phẩm?

Bài giải:

Gọi: A là biến cố sản phẩm được chọn là phế phẩm.

B_i sản phẩm được chọn do nhà máy thứ i sản xuất ($i = 1, 2, 3$)

Vì chỉ lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm nên có $\{B_1, B_2, B_3\}$ là một hệ đầy đủ. Theo giả

thiết ta có:
$$P(B_1) = \frac{3}{10}$$

$$P(B_2) = \frac{2}{10}$$

$$P(B_3) = \frac{5}{10}$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần ta được:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P(A | B_i) = \frac{3}{10} \cdot 0,01 + \frac{2}{10} \cdot 0,02 + \frac{5}{10} \cdot 0,03 = 0,022$$

Câu 12:

Có 3 hộp thuốc, hộp I có 5 ống tốt và 2 ống xấu, hộp II có 4 ống tốt và 1 ống xấu, hộp III có 3 ống tốt và 2 ống xấu. Lấy ngẫu nhiên 1 hộp và từ đó rút ra 1 ống thuốc thì được ống tốt. Xác suất để ống này thuộc hộp II.

Bài làm:

Gọi A_i là biến cố chọn hộp p thứ i ($i = 1, 2, 3$). B là biến cố chọn 1 ống tốt.

Vậy xác suất để B thuộc hộp II là:

$$P_{(A_2/B)} = \frac{P_{(A_2 \cap B)}}{P_{(B)}}$$

Trong đó:

$$P_{(A_2 \cap B)} = P_{(A_2)} \cdot P_{(B/A_2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

+ Ta có: A_1, A_2, A_3 độc lập

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \Omega, \{A_1, A_2, A_3\}$ là hệ đầy đủ.

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta có:

$$P_{(B)} = P_{(A_1)} \cdot P_{(B|A_1)} + P_{(A_2)} \cdot P_{(B|A_2)} + P_{(A_3)} \cdot P_{(B|A_3)}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{120} \\
 & = 1 \\
 P_A(B) &= \frac{(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}
 \end{aligned}$$

Vậy xác suất để ống thuốc được lấy ra thuộc hộp II

là: $\frac{14}{37} \times$

Câu 13.

Trong một lô hàng có 800 sản phẩm loại 1 và 200 sản phẩm loại 2. Lấy ngẫu nhiên ra 5 sản phẩm có hoàn lại. Gọi X là số sản phẩm loại 1 lấy được.

- a) X tuân theo quy luật nào? Viết biểu thức xác suất tổng quát của quy luật.
- b) Tính kỳ vọng và phương sai của X.
- c) Tìm số sản phẩm trung bình được lấy ra và tính khả năng để xảy ra điều đó.

Bài Giải

a) X tuân theo luật phân phối nhị thức.

Biểu thức tổng quát

X được gọi là có phân phối nhị thức ký hiệu là $X \sim B(n, p)$

n, p) Có hàm xác suất:

Với $P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad (q=1-p)$
 $k = 0, 1, 2, \dots, n, p \in (0; 1)$

b) Kỳ vọng và phương sai của

X Kỳ vọng:

X	1	2	3	4	5
P^X	0,0062	0,0508	0,2050	0,4106	0,32686
	7	8	6	3	

$E(X) = 1 \cdot 0,00627 + 2 \cdot 0,05088 + 3 \cdot 0,20506 + 4 \cdot 0,41063 + 5 \cdot 0,32686$
 $= 4,00003$

Phương sai:

x^2	1	4	9	16	25
-------	---	---	---	----	----

P_{X^2}	0,0062	0,0508	0,2050	0,4106	0,32686
	7	8	6	3	

$$E(X^2) = 1.0,00627 + 4.0,05088 + 9.0,20506 + 16.0,41063 + 25.0,32686 = 16,79691$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 16,79691 - (4,00003)^2 = 0,79667$$

Bài 14:

Ba công nhân cùng làm ra một loại sản phẩm, xác suất để người thứ 1, 2, 3 làm ra chính phẩm tương ứng là 0.9, 0.9, 0.8. Có một người trong đó làm ra 8 sản phẩm thì y có 2 phế phẩm. Tìm XS để trong 8 sản phẩm tiếp theo cũng do người đó làm ra sẽ có 6 chính phẩm.

Bài giải

Gọi A_i là các sản phẩm do công nhân thứ i sản xuất, $i = 1, 2, 3$

$$P(A) = P(A_1)P_{\bar{A}} + P(A_2)P_{\bar{A}} + P(A_3)P_{\bar{A}}$$

$$= \frac{1}{3} C_8^6 (0.9)^6 (0.1)^2 + \frac{1}{3} C_8^6 (0.9)^6 (0.1)^2 + \frac{1}{3} C_8^6 (0.8)^6 (0.2)^2 = 0.2 \quad (*)$$

Sau khi A xảy ra, xác suất của nhóm đầu y đủ đã phân bố lại như sau, biểu thức (*) cho

$$P_{\bar{A}} \approx P_{\bar{A}} \approx P_{\bar{A}}$$

ta $P_{\bar{A}} = 0.248 \quad 0.25$, tương tự $P_{\bar{A}} = 0.248 \quad 0.25$,

tương tự $P_{\bar{A}} = 0.501 \quad 0.5$

Gọi B là biến cố 8 sản phẩm tiếp theo cũng do công nhân đó sản xuất và có 2 phế phẩm.

$$P(B) = P_{\bar{A}} + P_{\bar{A}} + P_{\bar{A}}$$

$$= 0.25 \cdot C_8^6 (0.9)^6 (0.1)^2 + 0.25 \cdot C_8^6 (0.9)^6 (0.1)^2 + 0.25 \cdot C_8^6 (0.8)^6 (0.2)^2 = 0.23$$

Câu 15 :

Luật phân phối của biến (X, Y) cho bởi bảng:

Y	20	40	60
X			
10	λ	λ	0
20	2λ	λ	λ
30	3λ	λ	λ

Xác định λ và các phân phối X, Y?

Giải:

Các phân phối X, Y:

X	10	20	30
P^X	2λ	4λ	5λ

Y	20	40	60
P^Y	6λ	3λ	2
	λ		

Xác định λ :

$$11\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 1/11$$

Câu 16.

(X, Y) là cặp BNN có hàm mật độ đồng thời:

$$f(x, y) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16 - x - y}, \quad 0 < x < 2, 2 < y < 4$$

\ddot{i}
 \hat{i}^0 Tính $P(1 < Y < 3/X=2)$

Giải:

Hàm mật độ phân phối i lẽ của X

$$0 < x < 2$$

$$f_X(x) = \int_{y=2}^{y=4} f(x,y) dy = \int_{y=2}^{y=4} \frac{6-x-y}{8} dy = \frac{1}{8} [6y - xy - \frac{y^2}{2}]_{y=2}^{y=4} = \frac{3-x}{4}$$

Hàm mật độ phân phối i lẽ của Y

$$2 < y < 4$$

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{x=2} f(x,y) dx = \int_{x=0}^{x=2} \frac{6-x-y}{8} dx = \frac{1}{8} [6x - \frac{x^2}{2} - xy]_{x=0}^{x=2} = \frac{5-y}{4}$$

Ta có

$$f_X(x) f_Y(y) = f(x,y)$$

Hàm mật độ có điều kiện của Y với điều kiện X=x

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{6-x-y}{8}}{\frac{3-x}{4}} = \frac{6-x-y}{2(3-x)}, 0 < x < 2, 2 < y < 4$$

Thay số vào ta được

$$P(1 < Y < 3 | X=2) = P(2 < Y < 3 | X=2) = \int_{y=2}^{y=3} f_{Y|X}(y|x=2) dy = \int_{y=2}^{y=3} \frac{6-2-y}{2(3-2)} dy = \int_{y=2}^{y=3} \frac{4-y}{2} dy = \frac{1}{2} [\frac{y^2}{2} - 4y]_{y=2}^{y=3} = \frac{1}{2} (\frac{9}{2} - 12 - (\frac{4}{2} - 8)) = \frac{1}{2} (\frac{9}{2} - 12 - 2 + 8) = \frac{1}{2} (\frac{9}{2} - 6) = \frac{1}{2} (\frac{9-12}{2}) = \frac{1}{2} (-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$$

BÀI 18

a/ Tìm P(X+Y < 9.5)

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y) = 12$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) = 1.2^2 + 0.9^2 = 2.25 = 1.5^2$$

$$P[-\frac{9.5-12}{1.5} < \frac{X+Y-12}{1.5} < \frac{9.5-12}{1.5}] = \Phi(\frac{9.5-12}{1.5}) - \Phi(\frac{-9.5-12}{1.5}) = \Phi(-1.667) + 0.5 = 0.5 - 0.4515 = 0.0485$$

b/ Tìm P[X < Y]

$$M(X-Y) = M(X) - M(Y) = 2$$

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y) = 2.25 = 1.5^2$$

$$P(X < Y) = P(X - Y < 0) = \Phi\left(\frac{0 - 2}{1.5}\right) = \Phi(-1.333) = 0.5 - 0.4082 = 0.0918$$

c/ tìm $P(X > 2Y)$

$$M(X - 2Y) = M(X) - 2M(Y) = -3$$

$$D(X - 2Y) = D(X) + 4D(Y) = 4.68 = 2.163^2$$

$$P(X > 2Y) = P(0 < X - 2Y < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty + 3}{2.163}\right) - \Phi\left(\frac{0 + 3}{2.163}\right) = 0.5 - \Phi(1.386) = 0.5 - 0.4165 = 0.0835$$

d/ Tìm $P[2X + 3Y < 28]$

$$M(2X + 3Y) = 2M(X) + 3M(Y) = 29$$

$$D(2X + 3Y) = 4D(X) + 9D(Y) = 13.032 = 3.612^2$$

$$P(2X + 3Y < 28) = \Phi\left(\frac{28 - 29}{3.612}\right) = \Phi(-0.277) = 0.5 - 0.106 = 0.394$$

Bài 19:

giả sử cho 2 biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối chuẩn $N(0, 1)$.

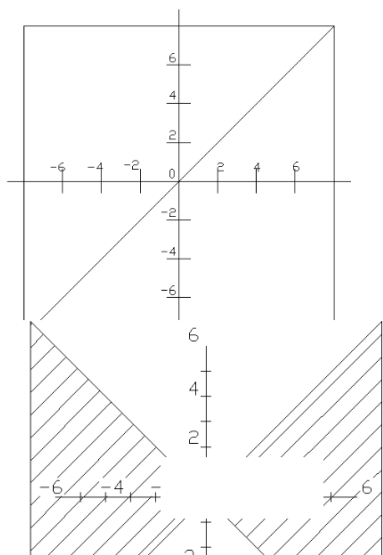
Tính các xác suất sau:

a/ $P(X < Y)$

b/ $P(|X| < Y)$

c/ $P(X < 1 \text{ và } Y < 1)$

Bài giải:



$$a/ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}$$

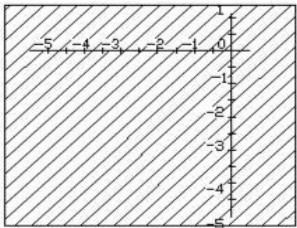
Hình a

b/

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

c/

Hình b



$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 0,8314$$

Hình c

Câu 20:

Giả sử trái cây của nông trường đã được đóng thành sọt, mỗi sọt 10 trái. Kiểm tra 50 sọt được kết quả như sau:

Số trái hồng trong sọt: k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số sọt có k trái hồng.	0	2	3	7	20	6	4	7	0	0	1

a) Tìm ước lượng cho tỉ lệ trái cây hồng trong nông trường.

b) Tìm ước lượng cho tỉ lệ trái cây hỏng trung bình ở mỗi sọt.

c) Tìm ước lượng không chệch cho độ biến động tỉ lệ trái cây hỏng ở mỗi sọt.

Bài làm:

a) Ước lượng cho tỉ lệ trái cây hỏng trong nông trường chính là ước lượng điểm cho tỉ lệ đám đông.

Tổng số trái cây điều tra là: $n = 10.50 = 500.$

Số trái cây hỏng phát hiện được:

$$M = 0.0+1.2+2.3+3.7+4.20+5.6+6.4+7.7+8.0+9.0+10.1 = 222.$$

Tỉ lệ hỏng trong mẫu là: $f = \frac{222}{500} = 0,444.$

Vậy ước lượng tỉ lệ trái cây hỏng trong nông trường là vào khoảng : 44,4%

b) Gọi x_i là tỉ lệ phần trăm trái cây hỏng ở mỗi sọt. Ưng với số trái hỏng trong sọt ta có các giá trị của x_i (%) là: 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

Lấy $x_0 = 40, h = 10, x_i^* = \frac{x_i - x_0}{h}.$

Ta có bảng sau:

x_i (%)	n_i	x_i^*	$x_i^* n_i$	$x_i^{*2} n_i$
0	0	-4	0	0
10	2	-3	-6	18
20	3	-2	-6	12
30	7	-1	-7	7
40	20	0	0	0
50	6	1	6	6
60	4	2	8	16
70	7	3	21	63
80	0	4	0	0

90	0	5	0	0
100	1	6	6	36
	n=50		$\overset{\circ}{a}x'_i \cdot n_i = 22$	$\overset{\circ}{a}^2 \cdot n_i = 158$

$$\bar{x}'_n = \frac{\overset{\circ}{a}x'_i \cdot n_i}{n} = \frac{22}{50} = 0,44 \times$$

$$\bar{x}_n = \bar{x}'_n \cdot h + x_0 = 0,44 \cdot 10 + 40 = 44,4(\%).$$

Vậy ước lượng cho tỉ lệ trái cây hỏng trung bình ở mỗi sọt vào khoảng 44,4%.

Ta thấy kết quả này tương tự kết quả ở câu (a).

c) Tìm ước lượng không chệch cho độ biến động tỉ lệ trái cây hỏng ở mỗi sọt: Ta có:

$$\overline{x'^2} = \frac{158}{50} = 3,16.$$

$$s^2_{x'} = \overline{x'^2} - (\bar{x}'_n)^2 = 3,16 - 0,44^2 = 2,9664.$$

$$s^2 = s^2_{x'} \cdot h^2 = 2,9664 \cdot 10^2 = 296,64.$$

$$s^2 = \frac{s^2 \cdot n}{n-1} = \frac{296,64 \cdot 50}{50-1} \approx 303.$$

Vậy ta dự đoán độ biến động của tỉ lệ hỏng giữa các sọt là vào khoảng 303.

Câu 21.

Trọng lượng trung bình của một loại sản phẩm là 6kg. Qua thực tế sản xuất, người ta tiến hành một số kiểm tra và được kết quả cho trong bảng sau (tính bằng kg).

4	1	7	5	6	7	3	6	7	3	8
5	8	6	4	6	5	7	5	1	9	2
								0		
6	4	7	7	6	6	4	9	3	7	7
2	5	7	7	1	6	6	5	1	2	11
								0		
6	4	8	6	4	8	1	1	3	7	8

							0			
2	7	7	6	1	4	5	2	1	7	4
				0				1		
7	4	6	5	4	6	5	4	9	5	4
6	5	8	6	6	9	5	6	8	6	8
8	5	3	4	8	5	1	8	5	6	5
4	9	6	6	8	4	6	3	5	3	4
1	1	9	2	1	9	4	9	1	9	10
0	0			1				0		

- a) Hãy kết luận về tình hình xác suất với mức $\alpha = 5\%$
- b) Hãy tìm một ước lượng cho giá trị trung bình thực tế sản xuất với độ tin cậy 99%.

Bài Giải

Từ bảng số liệu trên ta đưa về bảng

x_j	n_j	$x_j n_j$	$x_j^2 n_j$
1	4	4	4
2	6	12	24
3	7	21	63
4	17	68	272
5	17	85	425
6	23	138	828
7	15	105	735
8	12	96	768
9	9	81	729
10	8	80	800
11	3	33	363
	$n = 121$	$\sum x_j n_j = 723$	$\sum x_j^2 n_j = 5011$

Câu 22: Cặp $[X(\text{cm}), Y(\text{kg})]$ cho một vật liệu (có 33 cặp) trong bảng sau:

x	y	30	35	x	y	42	40
3	5	31	30	36	34	42	44
7	11	31	40	37	36	43	37
11	21	32	32	38	38	44	44
15	16	33	34	39	37	45	46
18	16	33	32	39	36	46	46
27	28	34	34	39	45	47	49
29	27	36	37	40	39	50	51
30	25	36	38	41	41		

a/ Tìm phương trình hồi quy tuyến tính theo Y và X.

b/ Tính hệ số tương quan r_{XY} .

Giải

a/

x_i	y_i	x_i^2	$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n}$	$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$	$(x_i - \bar{x}) \times (y_i - \bar{y})$
3	5	9	927.479339	844.5188	885.0275
7	11	49	699.842975	531.7916	610.0579
11	21	121	504.206612	170.5794	293.27
15	16	225	340.570248	26.1853	333.3003
18	16	324	238.842975	326.1855	279.1185
27	28	729	41.661157	36.73095	39.11846
29	27	841	19.8429752	49.85216	31.45179
30	25	900	11.9338843	82.09458	31.30028

30	35	900	11.9338843	0.882461	-3.24518
31	30	961	6.02479339	16.48852	9.966942
31	40	961	6.02479339	35.2764	-14.5785
32	32	1024	2.11570248	4.246097	2.997245
33	34	1089	0.20661157	0.003673	0.027548
33	32	1089	0.20661157	4.246097	0.936639
34	34	1156	0.29752066	0.003673	-0.03306
36	37	1296	6.47933884	8.64037	7.482094
36	38	1296	6.47933884	15.51882	10.2755
36	34	1296	6.4793384	0.003673	-0.15427
37	36	1369	12.5702479	3.761249	6.786033
38	38	1444	20.661157	15.51882	17.90634
39	37	1521	30.7520661	8.640037	16.30028
39	36	1521	30.7520661	3.761249	10.75482
39	45	1521	30.7520661	119.6703	60.66391
40	39	1600	42.8429752	24.39761	32.33058
41	41	1681	56.9338843	48.15519	52.36088
42	40	1764	73.0247934	35.2764	5075482
42	44	1764	73.0247934	98.79155	84.93664
43	37	1849	91.1157025	8.640037	28.05785
44	44	1936	111.206612	98.79155	104.8154
45	46	2025	133.297521	142.5491	137.8457
46	46	2116	157.38843	142.5491	149.7851
47	49	2209	183.479339	223.1855	202.3609
50	51	2500	273.752066	286.9431	280.27
n = 33	Σ	41086	4152.18182	3713.879	3752.091
	Σ / n		125.823691	112.5418	113.6997

b/

$$\bar{x} = 33.4545$$

$$\bar{y} = 34.0606$$

$$r_{XY} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{113.699}{\sqrt{125.82 \cdot 112.54}} = 0.955479$$

Phương trình hồi quy y theo x: $\hat{y} = a\bar{x} + b = 0.9036x + 3.829$

Câu 23:

a/ Ta lập bảng tính một số đặc trưng sẽ cần:

$$X_0 = 1.75$$

$$h = 0.5$$

Số lượng (kg)	Điểm giữa x_i	n	x_i	$x_i \cdot n$	$x_i^2 \cdot n$
0.5 – 1	0.75	40	-2	-80	160
1 – 1.5	1.25	70	-1	-70	70
1.5 – 2	1.75	110	0	0	0
2 – 2.5	2.25	90	1	90	90
2.5 – 3	2.75	60	2	120	240
3 - 4	3.5	30	3.5	105	367.5
		$\sum n = 400$		165	927.5

Ta có:

$$\bar{x}_n = \frac{\sum x_i \cdot n}{n} = 0.4125$$

$$x_n = 0.4125 \times 0.5 + 1.75 = 1.95625$$

$$\frac{927.5}{400}$$

$$\hat{\chi}^2 = \frac{927.5}{400} = 2.31875$$

$$\hat{s}_x^2 = 2.31875 - 0.4125^2 = 2.1486 \quad \text{và} \quad \hat{s}^2 = 2.1486 \times 400 = 859.44 \quad s^2$$

$$= \frac{400 \times 859.44}{399} = 861.594 \quad \text{và} \quad s = 29.353$$

Bài ra:

$$1 - \alpha = 95\% \quad \text{và} \quad t_\alpha = 1.96$$

$$\mu_1 = 1.95625 - 1.96 \times \frac{29.353}{20} = 1.725656$$

$$\mu_2 = 1.95625 + 1.96 \times \frac{29.353}{20} = 2.186844$$

Thành phố có 600000 hộ nên khoảng ước lượng tổng số lượng sản phẩm công ty tiêu thụ là:

$$\mu_1 = 1.725656 \times 600000 = 1,035,396 \text{ (kg)}$$

$$\mu_2 = 2.186844 \times 600000 = 1,312,106 \text{ (kg)}$$

CÂU 24

X(Kg) là chỉ tiêu của một loại sản phẩm. Điều tra một số sản phẩm ta có kết quả

x	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
n _i	5	10	25	30	18	12

- a. Ước lượng trung bình chỉ tiêu với độ tin cậy 98%
- b. Có tài liệu nói rằng trung bình X là 70% cho nhận xét với mức ý nghĩa 5%
- c. Ước lượng trung bình chỉ tiêu X của các sản phẩm có chỉ tiêu X không quá 60kg với độ tin cậy 99%. Giả thiết chỉ tiêu này có phân phối chuẩn

giải

ta có bảng đặc trưng mẫu $x_0=67,5$ $h=5$

x_i	n_i	x_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
52,5	5	-3	-15	45
57,5	10	-2	-20	40
62,5	25	-1	-25	25
67,5	30	0	0	0
72,5	18	1	18	18
77,5	12	2	24	48
	$n=100$		$\sum x_n = -18$	$\sum x^2 = 176$

$$\bar{x}_n = \frac{-18}{100} = -0,18$$

$$\bar{x}_n = -0,18.5 + 67,5 = 66,6$$

$$s_n^2 = \frac{176}{100} = 1,76$$

$$s_x^2 = 1,76 - (-0,18)^2 = 1,7276$$

$$s^2 = 1,7276 \times 100 = 172,76$$

$$s^2 = \frac{n \cdot s^2}{n-1} = \frac{100}{99} (172,76) = 174,5 \Rightarrow s = 13,2$$

Đây là bài toán ước lượng trung bình cho đám đông

+ $n=100 > 30$, σ_2 chưa biết. Ta áp dụng công thức $\mu_{1,2} = \bar{x}_n \pm t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}$

$98\% = 1 - \alpha = 2\phi(t_\alpha) \Rightarrow \phi(t_\alpha) = 0,49 \Rightarrow t_\alpha = 2,33$

$$P \mu_1 = \bar{x} - t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} = 63,52$$

$$\mu_2 = \bar{x} + t_{\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} = 69,68$$

Vậy trung bình chỉ tiêu kiểm tra là 63,52 đến

69.68 kg b) ta có bảng phân phối

x	52,5	57,5	62,5	67,5
n _i	5	10	25	30

$$\bar{x}_n = \frac{-60}{70} = -0,0857$$

$$\bar{x}_n = -0,0857 + 67,5 = 68,357$$

$$\bar{x}_n^2 = \frac{110}{70} = 1,57$$

$$s_x^2 = 1,57 - (-0,0857)^2 = 0,836$$

$$s^2 = 0,836 \times 70 = 58,59$$

$$s_2 = \frac{n \times s^2}{n-1} = \frac{70}{69} (58,59) = 59,43 \quad \Rightarrow s = 7,7$$

$$\mu = \mu_0 = 70$$

$$\alpha = 5\% = 0,05 \quad n = 70 > 30$$

Từ bảng phân phối student với n - 1 = 69 bậc tự do ta có

Ta tính kiểm định

$$t = \frac{|\bar{x}_n - \mu_0|}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{|68,357 - 70|}{\frac{7,7}{\sqrt{70}}} = 1,785$$

$t \leq t_{\alpha}, 1,785 < t_{\alpha} = 2,33$ vậy có thể chấp nhận

được Tài liệu đúng. Nghĩa là H₀ là đúng

c) ta có phân phối chuẩn

x	52,5	57,5
n _i	5	10

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{837,5}{15} = 55,8$$

$$s^2 = 5,96 \Rightarrow s = 2,44 \quad n = 15 < 30$$

Khi đó $\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ có phân phối student (n-1) bậc tự do

Biết $1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0,01 \Rightarrow t_{\alpha} = 2,976$
 $\Rightarrow 99\% \Rightarrow 1-\alpha = 99\% \Rightarrow \alpha = 0,01 \Rightarrow t_{\alpha} = 2,976$

$P(T \leq t_{n-1; \alpha}) = 1-\alpha$

Sao cho $\bar{x} - t_{n-1; \alpha} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu$

Suy ra

$$\mu_1 = \bar{x}_n - t_{\alpha}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} = 55,8 - 2,976 \frac{2,44}{\sqrt{15}} = 53,9$$

$$\mu_2 = \bar{x}_n + t_{\alpha}^{n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} = 55,8 + 2,976 \frac{2,44}{\sqrt{15}} = 57,7$$

Vậy khoảng tin cậy (53,9; 57,7)