Đề thi thử đại học

môn Toán khối A của trường THPT chuyên Lê Quý Đôn

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7 điểm)

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = f(x) = 8x^4 - 9x^2 + 1$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Dựa vào đồ thị (C) hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0 \text{ với } x \in [0;\pi].$$

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}} = \sqrt{x-2}$
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$

Câu III (1 điểm) Tính diện tích của miền phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = |x^2 - 4x| \text{ và } y = 2x.$$

Câu IV (1 điểm) Cho hình chóp cụt tam giác đều ngoại tiếp một hình cầu bán kính r cho trước. Tính thể tích hình chóp cụt biết rằng cạnh đáy lớn gấp đôi cạnh đáy nhỏ.

Câu V (1 điểm) Định m để phương trình sau có nghiệm

$$4\sin 3x\sin x + 4\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + m = 0$$

PHẦN RIÊNG (3 điểm): Thí sinh chỉ làm một trong hai phần (Phần 1 hoặc phần 2)

1. Theo chương trình chuẩn.

Câu VI.a (2 điểm)

1. Cho Δ ABC có đỉnh A(1;2), đường trung tuyến BM: $2x+y+1=0$ và phân giác trong CD: $x+y-1=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng (D) có phương trình tham số $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-2t \\ z=2+2t \end{cases}$ .Gọi Δ là đường thẳng qua điểm A(4;0;-1) song song với (D) và I(-2;0;2) là hình chiếu vuông góc của A trên (D). Trong các mặt phẳng qua Δ, hãy viết phương trình của mặt phẳng có khoảng cách đến (D) là lớn nhất.

Câu VII.a (1 điểm) Cho x, y, z là 3 số thực thuộc (0;1]. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{xy+1} + \frac{1}{yz+1} + \frac{1}{zx+1} \le \frac{5}{x+y+z}$$

2. Theo chương trình nâng cao.

Câu VI.b (2 điểm)

1. Cho hình bình hành ABCD có diện tích bằng 4. Biết A(1;0), B(0;2) và giao điểm I của hai đường chéo nằm trên đường thẳng y = x. Tìm tọa độ đỉnh C và D.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1;5;0), B(3;3;6) và đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ, xác định vị trí của điểm M để chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu VII.b (1 điểm) Cho a, b, c là ba cạnh tam giác. Chứng minh

$$a\left(\frac{1}{3a+b}+\frac{1}{3a+c}+\frac{2}{2a+b+c}\right)+\frac{b}{3a+c}+\frac{c}{3a+b}<2$$

---------------------Hết---------------------

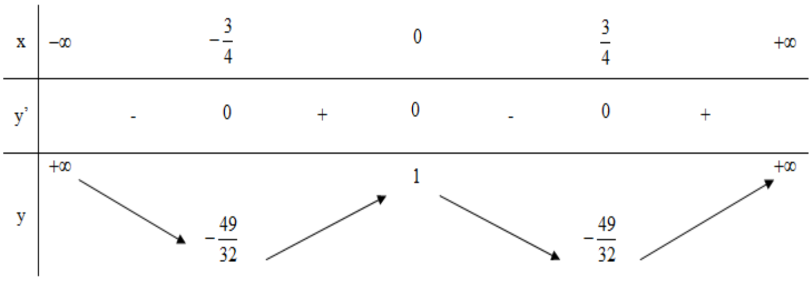
Đáp án

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Ý</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>I</td><td></td><td></td><td>2,00</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td></td><td>1,00</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>+ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>+ Sự biến thiên:

- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$
- $y'=32x^3-18x=2x\left(16x^2-9\right)$

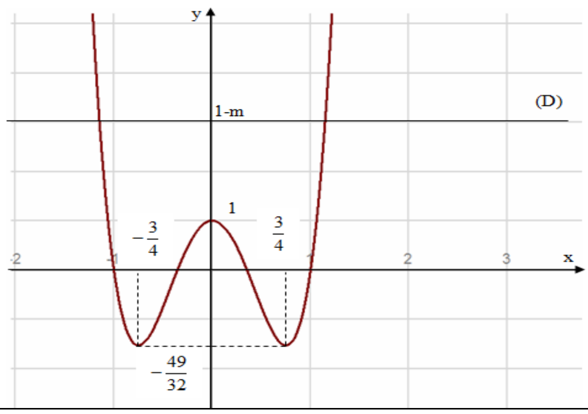
$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>

- Bảng biến thiên.



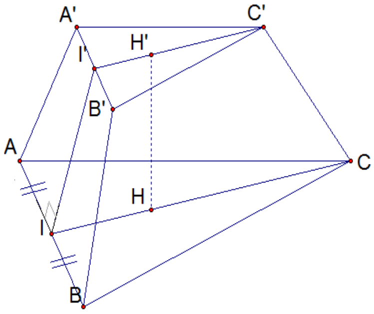
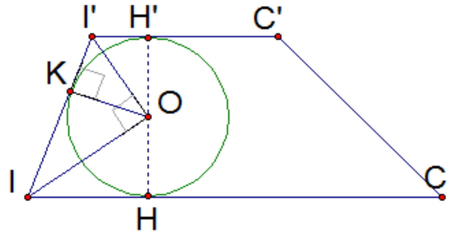
$y_{CT}=y\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{49}{32};\ y_{CT}=y\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{49}{32};\ y_{CĐ}=y(0)=1$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>

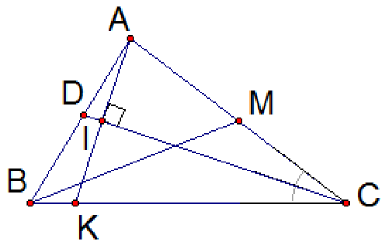
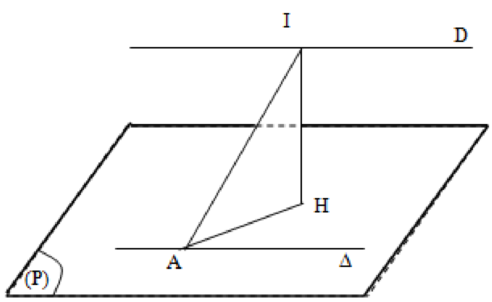
- Đồ thị

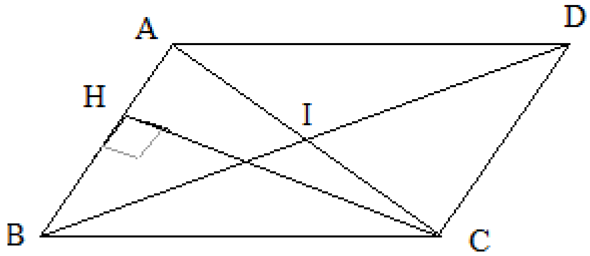

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td></td><td>1,00</td></tr>
</table>

		Xét phương trình $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0;\pi]$ (1) Đặt $t = \cos x$, phương trình (1) trở thành: $8t^4 - 9t^2 + m = 0$ (2) Vì $x \in [0;\pi]$ nên $t \in [-1;1]$, giữa x và t có sự tương ứng một đối một, do đó số nghiệm của phương trình (1) và (2) bằng nhau.	0,25
		Ta có: (2) $\Leftrightarrow 8t^4 - 9t^2 + 1 = 1 - m$ (3) Gọi (C_1): $y = 8t^4 - 9t^2 + 1$ với $t \in [-1;1]$ và (D): y = 1 – m. Phương trình (3) là phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (D). Chú ý rằng (C_1) giống như đồ thị (C) trong miền $-1 \le t \le 1$.	0,25
		Dựa vào đồ thị ta có kết luận sau: • $m > \frac{81}{32}$: Phương trình đã cho vô nghiệm. • $m = \frac{81}{32}$: Phương trình đã cho có 2 nghiệm. • $1 \le m < \frac{81}{32}$: Phương trình đã cho có 4 nghiệm. • $0 < m < 1$: Phương trình đã cho có 2 nghiệm. • $m = 0$: Phương trình đã cho có 1 nghiệm. • m < 0 : Phương trình đã cho vô nghiệm.	0,50
II			**2,00**
	1		**1,00**
		Phương trình đã cho tương đương: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2} = 0 \\ \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{\log_3 x} = 1 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ \begin{cases} \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)^{\log_3 x} = 0 \\ x > 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \begin{cases} \log_3 x \ln\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ x > 2 \end{cases} \end{array}\right.$	0,50
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 0 \\ \ln\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \\ x > 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x - \frac{1}{2} = 1 \end{array}\right. \\ x > 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right. \\ x > 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2$	0,50
	2		**1,00**
		Điều kiện: $\lvert x \rvert \ge \lvert y \rvert$ Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - y^2}; u \ge 0 \\ v = x + y \end{cases}$; $x = -y$ không thỏa hệ nên xét $x \ne -y$ ta có $y = \frac{1}{2}\left(v - \frac{u^2}{v}\right)$. Hệ phương trình đã cho có dạng: $\begin{cases} u + v = 12 \\ \frac{u}{2}\left(v - \frac{u^2}{v}\right) = 12 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 3 \\ v = 9 \end{cases}$	0,25

		+ $\begin{cases} u=4 \\ v=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=4 \\ x+y=8 \end{cases}$ (I) + $\begin{cases} u=3 \\ v=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=3 \\ x+y=9 \end{cases}$ (II)	
		Giải hệ (I), (II).	0,25
		Sau đó hợp các kết quả lại, ta được tập nghiệm của hệ phương trình ban đầu là $S=\{(5;3),(5;4)\}$	0,25
III			**1,00**
		Diện tích miền phẳng giới hạn bởi: $y=\|x^2-4x\|\,(C)$ và $(d): y=2x$ Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d): $\|x^2-4x\|=2x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-4x=2x \\ x^2-4x=-2x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-6x=0 \\ x^2-2x=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=6 \end{array}\right.$ Suy ra diện tích cần tính: $S=\left\|\int_0^2 \left(\|x^2-4x\|-2x\right)dx\right\|+\left\|\int_2^6 \left(\|x^2-4x\|-2x\right)dx\right\|$	0,25
		Tính: $I=\int_0^2 \left(\|x^2-4x\|-2x\right)dx$ Vì $\forall x\in[0;2],\ x^2-4x\le 0$ nên $\|x^2-4x\|=-x^2+4x \Rightarrow I=\int_0^2 \left(-x^2+4x-2x\right)dx=\frac{4}{3}$	0,25
		Tính $K=\int_2^6 \left(\|x^2-4x\|-2x\right)dx$ Vì $\forall x\in[2;4],\ x^2-4x\le 0$ và $\forall x\in[4;6],\ x^2-4x\ge 0$ nên $K=\int_2^4 \left(4x-x^2-2x\right)dx+\int_4^6 \left(x^2-4x-2x\right)dx=-16$.	0,25
		Vậy $S=\frac{4}{3}+16=\frac{52}{3}$	0,25
IV			**1,00**

		Gọi H, H’ là tâm của các tam giác đều ABC, A’B’C’. Gọi I, I’ là trung điểm của AB, A’B’. Ta có: $\begin{cases} AB\perp IC \\ AB\perp HH' \end{cases} \Rightarrow AB\perp (CHH') \Rightarrow (ABB'A')\perp (CII'C')$ Suy ra hình cầu nội tiếp hình chóp cụt này tiếp xúc với hai đáy tại H, H’ và tiếp xúc với mặt bên (ABB’A’) tại điểm $K\in II'$.	0,25
		Gọi x là cạnh đáy nhỏ, theo giả thiết 2x là cạnh đáy lớn. Ta có: $I'K = I'H' = \frac{1}{3}I'C' = \frac{x\sqrt{3}}{6};\ IK = IH = \frac{1}{3}IC = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ Tam giác IOI’ vuông ở O nên: $I'K.IK = OK^2 \Rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{6}.\frac{x\sqrt{3}}{3} = r^2 \Rightarrow x^2 = 6r^2$	0,25
		Thể tích hình chóp cụt tính bởi: $V = \frac{h}{3}\left(B + B' + \sqrt{B.B'}\right)$ Trong đó: $B = \frac{4x^2\sqrt{3}}{4} = x^2\sqrt{3} = 6r^2\sqrt{3};\ B' = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2};\ h = 2r$	0,25
		Từ đó, ta có: $V = \frac{2r}{3}\left(6r^2\sqrt{3} + \frac{3r^2\sqrt{3}}{2} + \sqrt{6r^2\sqrt{3}.\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{21r^3.\sqrt{3}}{3}$	0,25
V			**1,00**
		Ta có: +/ $4\sin 3x\sin x = 2(\cos 2x - \cos 4x)$; +/ $4\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\left[\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos 4x\right] = 2(\sin 2x + \cos 4x)$ +/ $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1 - \sin 4x)$ Do đó phương trình đã cho tương đương: $2(\cos 2x + \sin 2x) + \frac{1}{2}\sin 4x + m - \frac{1}{2} = 0$ (1) Đặt $t = \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ (điều kiện: $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$).	0,25
		Khi đó $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = t^2 - 1$. Phương trình (1) trở thành: $t^2 + 4t + 2m - 2 = 0$ (2) với $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ (2) $\Leftrightarrow t^2 + 4t = 2 - 2m$ Đây là phuơng trình hoành độ giao điểm của 2 đường $(D): y = 2 - 2m$ (là đường song song với Ox và cắt trục tung tại điểm có tung độ 2 – 2m) và (P): $y = t^2 + 4t$ với $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.	0,25

		Trong đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, hàm số $y=t^2+4t$ đạt giá trị nhỏ nhất là $2-4\sqrt{2}$ tại $t=-\sqrt{2}$ và đạt giá trị lớn nhất là $2+4\sqrt{2}$ tại $t=\sqrt{2}$.	0,25
		Do đó yêu cầu của bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $2-4\sqrt{2}\le 2-2m\le 2+4\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow -2\sqrt{2}\le m\le 2\sqrt{2}$.	0,25
VIa			**2,00**
	1		**1,00**
		 Điểm $C\in CD: x+y-1=0\Rightarrow C(t;1-t)$. Suy ra trung điểm M của AC là $M\left(\frac{t+1}{2};\frac{3-t}{2}\right)$.	0,25
		Điểm $M\in BM: 2x+y+1=0\Rightarrow 2\left(\frac{t+1}{2}\right)+\frac{3-t}{2}+1=0\Leftrightarrow t=-7\Rightarrow C(-7;8)$	0,25
		Từ A(1;2), kẻ $AK\perp CD: x+y-1=0$ tại I (điểm $K\in BC$). Suy ra $AK:(x-1)-(y-2)=0\Leftrightarrow x-y+1=0$. Tọa độ điểm I thỏa hệ: $\begin{cases}x+y-1=0\\x-y+1=0\end{cases}\Rightarrow I(0;1)$. Tam giác ACK cân tại C nên I là trung điểm của AK $\Rightarrow$ tọa độ của $K(-1;0)$.	0,25
		Đường thẳng BC đi qua C, K nên có phương trình: $\frac{x+1}{-7+1}=\frac{y}{8}\Leftrightarrow 4x+3y+4=0$	0,25
	2		**1,00**
		 Gọi (P) là mặt phẳng đi qua đường thẳng Δ, thì $(P)//(D)$ hoặc $(P)\supset(D)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P). Ta luôn có $IH\le IA$ và $IH\perp AH$.	0,25
		Mặt khác $\begin{cases}d((D),(P))=d(I,(P))=IH\\H\in(P)\end{cases}$ Trong mặt phẳng (P), $IH\le IA$; do đó $\max IH = IA\Leftrightarrow H\equiv A$. Lúc này (P) ở vị trí ($P_0$) vuông góc với IA tại A.	0,25

		Vecto pháp tuyến của (P_0) là $\vec{n}=\overrightarrow{IA}=(6;0;-3)$, cùng phương với $\vec{v}=(2;0;-1)$. Phương trình của mặt phẳng (P_0) là: $2(x-4)-1.(z+1)=2x-z-9=0$.	0,50
VIIa			**1,00**
		Để ý rằng $(xy+1)-(x+y)=(1-x)(1-y)\geq 0$; và tương tự ta cũng có $\begin{cases} yz+1\geq y+z \\ zx+1\geq z+x \end{cases}$	0,50
		Vì vậy ta có: $(x+y+z)\left(\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1}\right)\leq \frac{x}{yz+1}+\frac{y}{zx+1}+\frac{z}{xy+1}+1+1+1$ $\leq \frac{x}{yz+1}+\frac{y}{zx+y}+\frac{z}{xy+z}+3$ $=x\left(\frac{1}{yz+1}-\frac{z}{zx+y}-\frac{y}{xy+z}\right)+5$ $\leq x\left(1-\frac{z}{z+y}-\frac{y}{y+z}\right)+5$ $=5$	0,50
VIb			**2,00**
	1		**1,00**
		 Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;2)\Rightarrow AB=\sqrt{5}$. Phương trình của AB là: $2x+y-2=0$. $I\in(d): y=x\Rightarrow I(t;t)$. I là trung điểm của AC và BD nên ta có: $C(2t-1;2t), D(2t;2t-2)$.	0,25
		Mặt khác: $S_{ABCD}=AB.CH=4$ (CH: chiều cao) $\Rightarrow CH=\frac{4}{\sqrt{5}}$.	0,25
		Ngoài ra: $d(C;AB)=CH\Leftrightarrow \frac{\lvert 6t-4\rvert}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{4}{3}\Rightarrow C\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right) \\ t=0\Rightarrow C(-1;0), D(0;-2) \end{array}\right.$ Vậy tọa độ của C và D là $C\left(\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right), D\left(\frac{8}{3};\frac{2}{3}\right)$ hoặc $C(-1;0), D(0;-2)$	0,50
	2		**1,00**
		Gọi P là chu vi của tam giác MAB thì P = AB + AM + BM. Vì AB không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi AM + BM nhỏ nhất. Đường thẳng Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$. Điểm $M\in\Delta$ nên $M(-1+2t;1-t;2t)$.	0,25

		$AM=\sqrt{(-2+2t)^2+(-4-t)^2+(2t)^2}=\sqrt{9t^2+20}=\sqrt{(3t)^2+(2\sqrt{5})^2}$ $BM=\sqrt{(-4+2t)^2+(-2-t)^2+(-6+2t)^2}=\sqrt{9t^2-36t+56}=\sqrt{(3t-6)^2+(2\sqrt{5})^2}$ $AM+BM=\sqrt{(3t)^2+(2\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3t-6)^2+(2\sqrt{5})^2}$	
		Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hai vectơ $\vec{u}=(3t;2\sqrt{5})$ và $\vec{v}=(-3t+6;2\sqrt{5})$. Ta có $\begin{cases} \lvert\vec{u}\rvert=\sqrt{(3t)^2+(2\sqrt{5})^2} \\ \lvert\vec{v}\rvert=\sqrt{(3t-6)^2+(2\sqrt{5})^2} \end{cases}$ Suy ra $AM+BM=\lvert\vec{u}\rvert+\lvert\vec{v}\rvert$ và $\vec{u}+\vec{v}=(6;4\sqrt{5})\Rightarrow\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert=2\sqrt{29}$ Mặt khác, với hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ ta luôn có $\lvert\vec{u}\rvert+\lvert\vec{v}\rvert\geq\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert$ Như vậy $AM+BM\geq 2\sqrt{29}$	0,25
		Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \dfrac{3t}{-3t+6}=\dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\Leftrightarrow t=1$ $\Rightarrow M(1;0;2)$ và $\min(AM+BM)=2\sqrt{29}$.	0,25
		Vậy khi M(1;0;2) thì minP = $2\left(\sqrt{11}+\sqrt{29}\right)$	0,25
VIIb			**1,00**
		Vì a, b, c là ba cạnh tam giác nên: $\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases}$. Đặt $\dfrac{a+b}{2}=x, \dfrac{c+a}{2}=y, a=z\ (x,y,z>0)\Rightarrow x+y>z, y+z>x, z+x>y$. Vế trái viết lại: $VT=\dfrac{a+b}{3a+c}+\dfrac{a+c}{3a+b}+\dfrac{2a}{2a+b+c}$ $=\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}$	0,50
		Ta có: $x+y>z\Leftrightarrow z(x+y+z)<2z(x+y)\Leftrightarrow\dfrac{2z}{x+y+z}>\dfrac{z}{x+y}$. Tương tự: $\dfrac{x}{y+z}<\dfrac{2x}{x+y+z};\dfrac{y}{z+x}<\dfrac{2y}{x+y+z}$. Do đó: $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}<\dfrac{2(x+y+z)}{x+y+z}=2$. Tức là: $a\left(\dfrac{1}{3a+b}+\dfrac{1}{3a+c}+\dfrac{2}{2a+b+c}\right)+\dfrac{b}{3a+c}+\dfrac{c}{3a+b}<2$	0,50