Tổng hợp kiến thức on thi đại học mon toan

I- GIAÛI TÍCH TOÅ HÔÏP

1. **Giai thừa :** n! = 1.2...n
   0! = 1
   n! /(n – k)! = (n – k + 1).(n – k + 2) ... n
2. **Nguyên tắc cộng :** Trường hợp 1 có m cách chọn, trường hợp 2 có n cách chọn; mỗi cách chọn đều thuộc đúng một trường hợp. Khi đó, tổng số cách chọn là : m + n.
3. **Nguyên tắc nhân :** Hiện tượng 1 có m cách chọn, mỗi cách chọn này lại có n cách chọn hiện tượng 2. Khi đó, tổng số cách chọn liên tiếp hai hiện tượng là : m x n.
4. **Hoán vị :** Có n vật khác nhau, xếp vào n chỗ khác nhau. Số cách xếp : $P_n = n!$.
5. **Tổ hợp :** Có n vật khác nhau, chọn ra k vật. Số cách chọn : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
6. **Chỉnh hợp :** Có n vật khác nhau. Chọn ra k vật, xếp vào k chỗ khác nhau số cách : $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}, A_n^k = C_n^k.P_k$

   Chỉnh hợp = tổ hợp rồi hoán vị
7. **Tam giác Pascal :**

1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3	1	
1	4	6	4	1

C_0^0				
C_1^0	C_1^1			
C_2^0	C_2^1	C_2^2		
C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	
C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4

   Tính chất :

$$C_n^0 = C_n^n = 1, C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$$

8. **Nhị thức Newton :**

   * $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^n a^0 b^n$

     a = b = 1 : ... $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

     Với a, b ∈ {±1, ±2, ...}, ta chứng minh được nhiều đẳng thức chứa : $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$

   * $(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + \ldots + C_n^n x^n$

     Ta chứng minh được nhiều đẳng thức chứa $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ bằng cách :

     - Đạo hàm 1 lần, 2 lần, cho x = ±1, ±2, ... a = ±1, ±2, ...
     - Nhân với x^k , đạo hàm 1 lần, 2 lần, cho x = ±1, ±2, ... , a = ±1, ±2, ...
     - Cho a = ±1, ±2, ..., $\int_0^{\pm 1}$ hay $\int_0^{\pm 2} \ldots$ hay $\int_\alpha^\beta$

   Chú ý :

   * $(a + b)^n$: a, b chứa x. Tìm số hạng độc lập với x : $C_n^k a^{n-k} b^k = Kx^m$

     Giải pt : m = 0, ta được k.
   * $(a + b)^n$: a, b chứa căn . Tìm số hạng hữu tỷ.

$$C_n^k a^{n-k} b^k = Kc^{\frac{m}{p}} d^{\frac{r}{q}}$$

Giải hệ pt : $\begin{cases} m/p \in Z \\ r/q \in Z \end{cases}$, tìm được k

* Giải pt , bpt chứa $A_n^k, C_n^k \ldots$: đặt điều kiện k, n ∈ N^* ..., k ≤ n. Cần biết đơn giản các giai thừa, qui đồng mẫu số, đặt thừa số chung.
* Cần phân biệt : qui tắc cộng và qui tắc nhân; hoán vị (xếp, không bốc), tổ hợp (bốc, không xếp), chỉnh hợp (bốc rồi xếp).
* Áp dụng sơ đồ nhánh để chia trường hợp , tránh trùng lắp hoặc thiếu trường hợp.
* Với bài toán tìm số cách chọn thỏa tính chất p mà khi chia trường hợp, ta thấy số cách chọn không thỏa tính chất p ít trường hợp hơn, ta làm như sau :

  số cách chọn thỏa p.
  = số cách chọn tùy ý - số cách chọn không thỏa p.
  Cần viết mệnh đề phủ định p thật chính xác.
* Vé số, số biên lai, bảng số xe ... : chữ số 0 có thể đứng đầu (tính từ trái sang phải).
* Dấu hiệu chia hết :

  - Cho 2 : tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8.
  - Cho 4 : tận cùng là 00 hay 2 chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 4.
  - Cho 8 : tận cùng là 000 hay 3 chữ số cuối hợp thành số chia hết cho 8.
  - Cho 3 : tổng các chữ số chia hết cho 3.
  - Cho 9 : tổng các chữ số chia hết cho 9.
  - Cho 5 : tận cùng là 0 hay 5.
  - Cho 6 : chia hết cho 2 và 3.
  - Cho 25 : tận cùng là 00, 25, 50, 75.

II- ĐẠI SỐ

1. Chuyeản veá :

$a + b = c \Leftrightarrow a = c - b;\ ab = c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = c = 0 \\ \begin{cases} b \neq 0 \\ a = c/b \end{cases} \end{array}\right.$

$a/b = c \Leftrightarrow \begin{cases} a = bc \\ b \neq 0 \end{cases}$; $\qquad a^{2n+1} = b \Leftrightarrow a = \sqrt[2n+1]{b}$

$$a^{2n} = b \Leftrightarrow a = \pm\sqrt[2n]{b},\ a = \sqrt[2n]{b} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^{2n} \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$a = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm a \\ a \geq 0 \end{cases}, a = \log_\alpha b \Leftrightarrow b = \alpha^a$$

$$a + b < c \Leftrightarrow a < c - b\ ;\ ab < c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0, c > 0 \\ \begin{cases} b > 0 \\ a < c/b \end{cases} \\ \begin{cases} b < 0 \\ a > c/b \end{cases} \end{array}\right.$$

2. Giao nghieäm :

$$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases} \Leftrightarrow x > \max\{a,b\} \; ; \; \begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases} \Leftrightarrow x < \min\{a,b\}$$

$$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases} \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} a < x < b \,(\text{nếu } a < b) \\ VN\,(\text{nếu } a \ge b) \end{array} \right. ; \begin{cases} p \vee q \\ \Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} p \\ \Gamma \end{cases} \\ \begin{cases} q \\ \Gamma \end{cases} \end{array} \right.$$

Nhiều dấu v : vẽ trục để giao nghiệm.

3. Coâng thöùc caàn nhöù :

a. $\sqrt{\ }$: chỉ được bình phương nếu 2 vế không âm. Làm mất $\sqrt{\ }$ phải đặt điều kiện.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge 0 \\ a = b^2 \end{cases}, \; \sqrt{a} \le b \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge 0 \\ 0 \le a \le b^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{a} \ge b \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ a \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b \ge 0 \\ a \ge b^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{ab} = \left\langle \begin{array}{l} \sqrt{a}.\sqrt{b} \;\; (\text{nếu } a,b \ge 0) \\ \sqrt{-a}.\sqrt{-b} \;\; (\text{nếu } a,b < 0) \end{array} \right.$$

b. $|.|$: phá $|.|$ bằng cách bình phương : $|a|^2 = a^2$ hay bằng định nghĩa :

$$|a| = \left\langle \begin{array}{l} a \quad (\text{nếu } a \ge 0) \\ -a\,(\text{nếu } a < 0) \end{array} \right.$$

$$|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \ge 0 \\ a = \pm b \end{cases} ; \; |a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$$

$$|a| \le b \Leftrightarrow -b \le a \le b$$

$$|a| \ge b \Leftrightarrow b < 0 \text{hay} \begin{cases} b \ge 0 \\ a \le -b \vee a \ge b \end{cases}$$

$$|a| \le |b| \Leftrightarrow a^2 - b^2 \le 0$$

c. Mũ : $y = a^x, x \in R, y > 0, y \uparrow \text{nếu } a > 1, \; y \downarrow \text{nếu } 0 < a < 1.$

$$a^0 = 1 \; ; \; a^{-m/n} = 1/\sqrt[n]{a^m} \; ; \; a^m.a^n = a^{m+n}$$

$$a^m / a^n = a^{m-n} \; ; \; (a^m)^n = a^{m.n} \; ; \; a^n / b^n = (a/b)^n$$

$$a^n.b^n = (ab)^n \; ; \; a^m = a^n \Leftrightarrow (m = n, 0 < a \ne 1) \;\vee\; a = 1$$

$$a^m < a^n \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} m < n\,(\text{nếu } a > 1) \\ m > n\,(\text{nếu } 0 < a < 1) \end{array} \right., \; \alpha = a^{\log_a \alpha}$$

d. log : $y = \log_a x$, $x > 0$, $0 < a \ne 1$, $y \in R$
$y\uparrow$ nếu $a > 1$, $y\downarrow$ nếu $0 < a < 1$, $\alpha = \log_a a^\alpha$
$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ ($\Leftarrow$)

$\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N$ ($\Leftarrow$)

$\log_a M^2 = 2\log_a|M|, 2\log_a M = \log_a M^2$ ($\Rightarrow$)

$\log_a M^3 = 3\log_a M$, $\log_a c = \log_a b.\log_b c$

$\log_b c = \log_a c/\log_a b$, $\log_{a^\alpha} M = \frac{1}{\alpha}\log_a M$

$\log_a(1/M) = -\log_a M$, $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

$$\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} 0 < M < N (\text{nếu } a > 1) \\ M > N > 0 (\text{nếu } 0 < a < 1) \end{array} \right.$$

Khi làm toán log, nếu miền xác định nới rộng : dùng điều kiện chặn lại, tránh dùng công thức làm thu hẹp miền xác định. Mất log phải có điều kiện.

4. Ñoải bieán :

a. Đơn giản : $t = ax + b \in R$, $t = x^2 \geq 0$, $t = \sqrt{x} \geq 0$, $t = |x| \geq 0$, $t = a^x > 0$, $t = \log_a x \in R$

Nếu trong đề bài có điều kiện của x, ta chuyển sang điều kiện của t bằng cách biến đổi trực tiếp bất đẳng thức.

b. Hàm số : $t = f(x)$ dùng BBT để tìm điều kiện của t. Nếu x có thêm điều kiện, cho vào miền xác định của *f*.

c. Lượng giác : t = sinx, cosx, tgx, cotgx. Dùng phép chiếu lượng giác để tìm điều kiện của t.

d. Hàm số hợp : từng bước làm theo các cách trên.

5. Xeùt daáu :

a. Đa thức hay phân thức hữu tỷ, dấu A/B giống dấu A.B; bên phải cùng dấu hệ số bậc cao nhất; qua nghiệm đơn (bội lẻ) : đổi dấu; qua nghiệm kép (bội chẵn) : không đổi dấu.

b. Biểu thức f(x) vô tỷ : giải $f(x) < 0$ hay $f(x) > 0$.

c. Biểu thức f(x) vô tỷ mà cách b không làm được : xét tính liên tục và đơn điệu của f, nhẩm 1 nghiệm của pt $f(x) = 0$, phác họa đồ thị của f , suy ra dấu của f.

6. So saùnh nghieäm phöông trình baäc 2 vôùi α :

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

* $S = x_1 + x_2 = -b/a$; $P = x_1x_2 = c/a$

Dùng S, P để tính các biểu thức đối xứng nghiệm. Với đẳng thức $g(x_1,x_2) = 0$ không đối xứng, giải hệ pt :

$$\begin{cases} g = 0 \\ S = x_1 + x_2 \\ P = x_1.x_2 \end{cases}$$

Biết S, P thỏa $S^2 - 4P \geq 0$, tìm x_1, x_2 từ pt : $X^2 - SX + P = 0$

* Dùng Δ, S, P để so sánh nghiệm với 0 :

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0, \quad 0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

$$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$$

* Dùng Δ, af(α), S/2 để so sánh nghiệm với α : $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0$

$$\alpha < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \alpha < S/2 \end{cases} ; \quad x_1 < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ S/2 < \alpha \end{cases}$$

$$\alpha < x_1 < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\beta) < 0 \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \alpha < \beta \end{cases} ; \quad x_1 < \alpha < x_2 < \beta \Leftrightarrow \begin{cases} a.f(\alpha) < 0 \\ a.f(\beta) > 0 \\ \alpha < \beta \end{cases}$$

7. Phöông trình baäc 3 :

a. Viête : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = -b/a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c/a$, $x_1.x_2.x_3 = -d/a$

Biết $x_1 + x_2 + x_3 = A$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = B$, $x_1.x_2.x_3 = C$

thì x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm phương trình : $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$

b. Số nghiệm phương trình bậc 3 :

• $x = \alpha \vee f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$:

3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

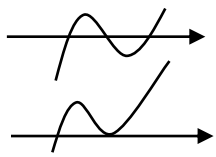
2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

1 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$ hay $\begin{cases} \Delta = 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases}$

• Phương trình bậc 3 không nhẩm được 1 nghiệm, m tách được sang 1 vế : dùng sự tương giao giữa (C) : y = f(x) và (d) : y = m.

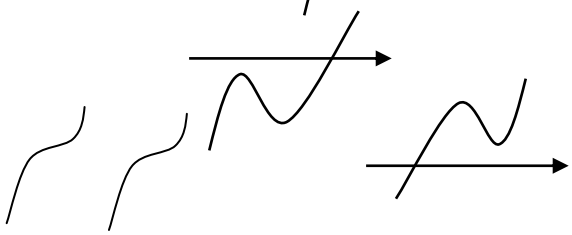
• Phương trình bậc 3 không nhẩm được 1 nghiệm, m không tách được sang 1 vế : dùng sự tương giao giữa (C_m) : y = f(x, m) và (Ox) : y = 0

3 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \end{cases}$



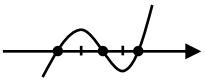
2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} = 0 \end{cases}$

1 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0 \vee \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} > 0 \end{cases}$



c. Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành CSC :

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{uốn} = 0 \end{cases}$



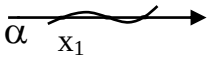
d. So sánh nghiệm với α :

• $x = x_o \vee f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$: so sánh nghiệm phương trình bậc 2 f(x) với α.

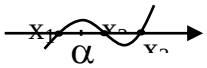
• Không nhẩm được 1 nghiệm, m tách được sang 1 vế : dùng sự tương giao của f(x) = y: (C) và y = m: (d) , đưa α vào BBT.

- Không nhẩm được 1 nghiệm, m không tách được sang 1 vế : dùng sự tương giao của (C_m) : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (có m) ,$(a > 0)$ và (Ox)

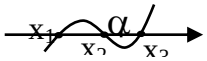
$$\alpha < x_1 < x_2 < x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \\ y(\alpha) < 0 \\ \alpha < x_{CĐ} \end{cases}$$



$$x_1 < \alpha < x_2 < x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \\ y(\alpha) > 0 \\ \alpha < x_{CT} \end{cases}$$



$$x_1 < x_2 < \alpha < x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \\ y(\alpha) < 0 \\ x_{CĐ} < \alpha \end{cases}$$



$$x_1 < x_2 < x_3 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y_{CĐ}.y_{CT} < 0 \\ y(\alpha) > 0 \\ x_{CT} < \alpha \end{cases}$$

8. Phöông trình baäc 2 coù ñieàu kieän :

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, $x \neq \alpha$

2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$, 1 nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(\alpha) \neq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \vee \begin{cases} \Delta = 0 \\ f(\alpha) = 0 \end{cases}$

Nếu a có tham số, xét thêm a = 0 với các trường hợp 1 nghiệm, VN.

9. Phöông trình baäc 4 :

a. Trùng phương : $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 \geq 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$

$t = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{t}$

4 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$; 3 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} P = 0 \\ S > 0 \end{cases}$

2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ \left[\begin{array}{l} \Delta = 0 \\ S/2 > 0 \end{array}\right. \end{cases}$; 1 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} P = 0 \\ S < 0 \end{array}\right. \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ S/2 = 0 \end{cases} \end{cases}$

VN $\Leftrightarrow \Delta < 0 \vee \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta < 0 \vee \begin{cases} P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

4 nghiệm CSC $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t_1 < t_2 \\ \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \end{cases}$

Giải hệ pt : $\begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ S = t_1 + t_2 \\ P = t_1.t_2 \end{cases}$

b. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$. Đặt $t = x + \dfrac{1}{x}$. Tìm đk của t bằng BBT : $|t| \geq 2$

c. $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$. Đặt $t = x - \dfrac{1}{x}$. Tìm đk của t bằng BBT : $t \in R$.

d. $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = e$ với $a + b = c + d$. Đặt : $t = x^2 + (a + b)x$. Tìm đk của t bằng BBT.

e. $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$. Đặt : $t = x + \dfrac{a+b}{2}$, $t \in R$.

10. Hệ phương trình bậc 1 : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$. Tính :

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$

$D \neq 0$: nghiệm duy nhất $x = D_x/D$, $y = D_y/D$.

$D = 0$, $D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0$: VN

$D = D_x = D_y = 0$: VSN hay VN (giải hệ với m đã biết).

11. Hệ phương trình đối xứng loại 1 :

Từng phương trình đối xứng theo x, y. Đạt $S = x + y$, $P = xy$.

ĐK : $S^2 - 4P \geq 0$. Tìm S, P. Kiểm tra đk $S^2 - 4P \geq 0$;

Thế S, P vào pt : $X^2 - SX + P = 0$, giải ra 2 nghiệm là x và y.

(α, β) là nghiệm thì (β, α) cũng là nghiệm; nghiệm duy nhất

$\Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow m = ?$

Thay m vào hệ, giải xem có duy nhất nghiệm không.

12. Hệ phương trình đối xứng loại 2 :

Phương trình này đối xứng với phương trình kia. Trừ 2 phương trình, dùng các hằng đẳng thức đưa về phương trình tích A.B = 0.

Nghiệm duy nhất làm như hệ đối xứng loại 1.

13. Hệ phương trình đẳng cấp : $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ a'x^2 + b'xy + c'y^2 = d' \end{cases}$

Xét y = 0. Xét y ≠ 0 : đặt x = ty, chia 2 phương trình để khử t. Còn 1 phương trình theo y, giải ra y, suy ra t, suy ra x. Có thể xét x = 0, xét x ≠ 0, đặt y = tx.

14. Bất phương trình, bất đẳng thức :

* Ngoài các bất phương trình bậc 1, bậc 2, dạng cơ bản của $\sqrt{\ }$, $|.|$, log, mũ có thể giải trực tiếp, các dạng khác cần lập bảng xét dấu. Với bất phương trình dạng tích AB < 0, xét dấu A, B rồi AB.

* Nhân bất phương trình với số dương : không đổi chiều

số âm : có đổi chiều

Chia bất phương trình : tương tự.

* Chỉ được nhân 2 bất pt vế theo vế , nếu 2 vế không âm.

* Bất đẳng thức Côsi :

a, b ≥ 0 : $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Dấu = xảy ra chỉ khi a = b.

a, b, c ≥ 0 : $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

Dấu = xảy ra chỉ khi a = b = c.

* Bất đẳng thức Bunhiacốpxki : a, b, c, d

$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2).(c^2 + d^2)$; Dấu = xảy ra chỉ khi a/b = c/d

15. Bài toán tìm m để phương trình có k nghiệm :

Nếu tách được m, dùng sự tương giao của (C) : y = f(x) và (d) : y = m. Số nghiệm bằng số điểm chung.

Nếu có điều kiện của x ∈ I, lập BBT của f với x ∈ I.

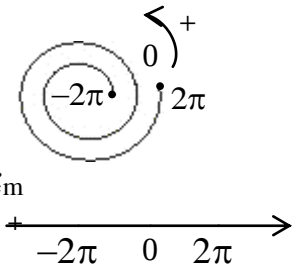
16. Bài toán tìm m để bất pt vô nghiệm, luôn luôn nghiệm, có nghiệm x ∈ I :

Nếu tách được m, dùng đồ thị, lập BBT với x ∈ I.

f(x) ≤ m : (C) dưới (d) (hay cắt)

f(x) ≥ m : (C) trên (d) (hay cắt)

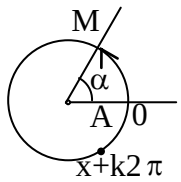
III- LƯỢNG GIÁC



1. Đường tròn lượng giác :

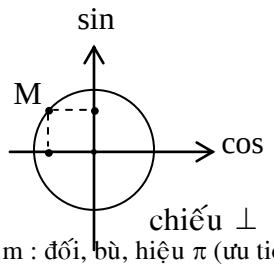
Trên đường tròn lượng giác, góc α đồng nhất với cung AM, đồng nhất với điểm M. Ngược lại, 1 điểm trên đường tròn lượng giác ứng với vô số các số thực x + k2π.

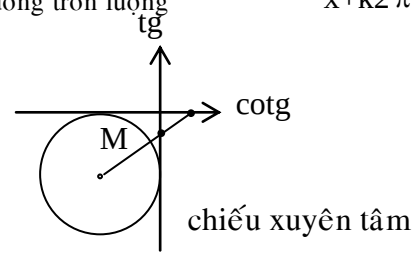
Trên đường tròn lượng giác, nắm vững các góc đặc biệt : bội của $\dfrac{\pi}{6}$ ($\dfrac{1}{3}$ cung phần tư) và $\dfrac{\pi}{4}$ ($\dfrac{1}{2}$ cung phần tư)



$x = \alpha + \dfrac{2k\pi}{n}$: α là 1 góc đại diện, n : số điểm cách đều trên đường tròn lượng giác.

2. Hàm số lượng giác :





3. Cung liên kết :

* Đổi dấu, không đổi hàm : đối, bù, hiệu π (ưu tiên không đổi dấu : sin bù, cos đối, tg cotg hiệu π).

* Đổi hàm, không đổi dấu : phụ

* Đổi dấu, đổi hàm : hiệu $\dfrac{\pi}{2}$ (sin lớn = cos nhỏ : không đổi dấu).

4. Công thức :

a. Cơ bản : đổi hàm, không đổi góc.
b. Cộng : đổi góc a ± b, ra a, b.
c. Nhân đôi : đổi góc 2a ra a.
d. Nhân ba : đổi góc 3a ra a.
e. Hạ bậc : đổi bậc 2 ra bậc 1. Công thức đổi bậc 3 ra bậc 1 suy từ công thức nhân ba.
f. Đưa về $t = tg\frac{a}{2}$: đưa lượng giác về đại số.
g. Tổng thành tích : đổi tổng thành tích và đổi góc a, b thành (a ± b) / 2.
h. Tích thành tổng : đổi tích thành tổng và đổi góc a, b thành a ± b.

5. Phương trình cơ bản : $\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = -1$ hay $\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$,

$\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$; $\sin\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$,

$\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = -1$ hay $\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$,

$\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = k2\pi$, $\cos\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + k2\pi$

$\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + k2\pi \vee u = \pi - v + k2\pi$

$\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$

$tg u = tg v \Leftrightarrow u = v + k\pi$

$cotg u = cotg v \Leftrightarrow u = v + k\pi$

6. Phương trình bậc 1 theo sin và cos : $a\sin u + b\cos u = c$

* Điều kiện có nghiệm : $a^2 + b^2 \geq c^2$

* Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, dùng công thức cộng đưa về phương trình cơ bản.

(cách khác : đưa về phương trình bậc 2 theo $t = tg\frac{u}{2}$)

7. Phương trình đối xứng theo sin, cos :

Đưa các nhóm đối xứng về sin + cos và sin.cos.

Đặt : $t = \sin u + \cos u = \sqrt{2}\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}, \sin u.\cos u = \frac{t^2 - 1}{2}$

8. Phương trình chứa |sinu + cosu| và sinu.cosu :

Đặt : $t = |\sin u + \cos u| = \sqrt{2}\left|\sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right)\right|, 0 \leq t \leq \sqrt{2}, \sin u.\cos u = \frac{t^2 - 1}{2}$

9. Phương trình chứa sinu – cosu và sinu.cosu :

Đặt : $t = \sin u - \cos u = \sqrt{2}\sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right), -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}, \sin u.\cos u = \frac{1 - t^2}{2}$

10. Phương trình chứa |sinu – cosu| và sinu.cosu :

Đặt : $t = |\sin u - \cos u| = \sqrt{2}\left|\sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right)\right|, 0 \leq t \leq \sqrt{2}, \sin u.\cos u = \frac{1 - t^2}{2}$

11. Phương trình toàn phương (bậc 2 và bậc 0 theo sinu và cosu) :

Xét cosu = 0; xét cosu ≠ 0, chia 2 vế cho $\cos^2 u$, dùng công thức $1/\cos^2 u = 1 + tg^2 u$, đưa về phương trình bậc 2 theo t = tgu.

12. Phương trình toàn phương mở rộng :

* Bậc 3 và bậc 1 theo sinu và cosu : chia 2 vế cho $\cos^3 u$.

* Bậc 1 và bậc – 1 : chia 2 vế cho cosu.

13. Giải phương trình bằng cách đổi biến :

Nếu không đưa được phương trình về dạng tích, thử đặt :

* t = cosx : nếu phương trình không đổi khi thay x bởi – x.
* t = sinx : nếu phương trình không đổi khi thay x bởi π – x.
* t = tgx : nếu phương trình không đổi khi thay x bởi π + x.
* t = cos2x : nếu cả 3 cách trên đều đúng
* $t = tg\frac{x}{2}$: nếu cả 3 cách trên đều không đúng.

14. Phương trình đặc biệt :

* $u^2 + v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$
* $\begin{cases} u = v \\ u \le C \\ v \ge C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = C \\ v = C \end{cases}$
* $\begin{cases} u \le A \\ v \le B \\ u + v = A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = A \\ v = B \end{cases}$
* sinu.cosv = 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \cos v = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \sin u = -1 \\ \cos v = -1 \end{cases}$
* sinu.cosv = – 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin u = 1 \\ \cos v = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} \sin u = -1 \\ \cos v = 1 \end{cases}$

Tương tự cho : sinu.sinv = ± 1, cosu.cosv = ± 1.

15. Hệ phương trình : Với F(x) là sin, cos, tg, cotg

a. Dạng 1 : $\begin{cases} F(x) \pm F(y) = m & (1) \\ x \pm y = n & (2) \end{cases}$. Dùng công thức đổi + thành nhân,

thế (2) vào (1) đưa về hệ phương trình : $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$

b. Dạng 2 : $\begin{cases} F(x).F(y) = m \\ x \pm y = n \end{cases}$. Tương tự dạng 1, dùng công thức đổi nhân thành +.

c. Dạng 3 : $\begin{cases} F(x)/F(y) = m \\ x \pm y = n \end{cases}$.

Dùng tỉ lệ thức : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$ biến đổi phương trình (1) rồi dùng công thức đổi + thành x.

d. Dạng khác : tìm cách phối hợp 2 phương trình, đưa về các pt cơ bản.

16. Toán Δ :

* Luôn có sẵn 1 pt theo A, B, C : A + B + C = π
* A + B bù với C, (A + B)/2 phụ với C/2.
* A, B, C ∈ (0, π) ; A/2, B/2, C/2 ∈ (0, π/2)
  A + B ∈ (0, π) ; (A + B)/2 ∈ (0, π/2) ;
  A – B ∈ (– π, π) , (A – B)/2 ∈ (– π/2, π/2)
  Dùng các tính chất này để chọn k.

* Đổi cạnh ra góc (đôi khi đổi góc ra cạnh) : dùng định lý hàm sin : a = 2RsinA hay định lý hàm cos : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

* $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} = pr$
  $= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

* Trung tuyến : $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

* Phân giác : $\ell_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

IV- TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa, công thức, tính chất :

* F là 1 nguyên hàm của *f* ⇔ *f* là đạo hàm của F.
  Họ tất cả các nguyên hàm của *f* :
  $$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (C \in R)$$

* $\int du = u + C$; $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$; $\int e^u du = e^u + C$; $\int a^u du = a^u / \ln a + C$
  $\int \sin u du = -\cos u + C$; $\int \cos u du = \sin u + C$
  $\int du/\sin^2 u = -\cot gu + C$; $\int du/\cos^2 u = tgu + C$

* $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

* $\int_a^a = 0$; $\int_a^b = -\int_b^a$, $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$
  $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$; $\int_a^b kf = k\int_a^b f$

2. Tích phân từng phần :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Thường dùng khi tính tích phân các hàm hỗn hợp.

a. $\int x^n e^x$, $\int x^n \sin x$; $\int x^n \cos x$: $u = x^n$

b. $\int x^n \ln x$: $u = \ln x$

c. $\int e^x \sin x$, $\int e^x \cos x$: $u = e^x$ hay $dv = e^x dx$

từng phần 2 lần, giải phương trình ẩn hàm ∫

3. Các dạng thường gặp :

a. $\int \sin^m x.\cos^{2n+1} x$: u = sinx.

$\int \cos^m x.\sin^{2n+1} x$: u = cosx.

$\int \sin^{2m} x.\cos^{2n} x$: hạ bậc về bậc 1

b. $\int tg^{2m}x/\cos^{2n} x$: u = tgx (n ≥ 0)

$\int \cot g^{2m}x/\sin^{2n} x$: u = cotgx (n ≥ 0)

c. $\int$ chứa $a^2 - u^2$: u = asint

$\int$ chứa $u^2 - a^2$: u = a/cost

$\int$ chứa $a^2 + u^2$: u = atgt

d. $\int R(\sin x, \cos x)$, R : hàm hữu tỷ

R(−sinx, cosx) = − R(sinx, cosx) : u = cosx
R(sinx, −cosx) = − R(sinx, cosx) : u = sinx
R(−sinx,−cosx) = R(sinx, cosx) : u = tgx ∨ u = cotgx

R đơn giản : $u = tg\frac{x}{2}$

$\int_0^{\pi/2}$:thử đặt $u = \frac{\pi}{2} - x$

$\int_0^{\pi}$:thử đặt $u = \pi - x$

e. $\int x^m(a+bx^n)^{p/q}, (m+1)/n \in Z : u^q = a + bx^n$

f. $\int x^m(a+bx^n)^{p/q}, \frac{m+1}{n} + \frac{p}{q} \in Z : u^q x^n = a + bx^n$

g. $\int dx/[(hx+k)\sqrt{ax^2+bx+c} : hx + k = \frac{1}{u}$

h. $\int R(x, \sqrt{(ax+b)/(cx+d)}$, R là hàm hữu tỷ : $u = \sqrt{(ax+b)/(cx+d)}$

i. $\int$ chứa $(a + bx^k)^{m/n}$: thử đặt $u^n = a + bx^k$.

4. Tích phân hàm số hữu tỷ :

$\int P(x)/Q(x)$: bậc P < bậc Q

* Đưa Q về dạng tích của x + a, $(x + a)^n$, $ax^2 + bx + c$ $(\Delta < 0)$

* Đưa P/Q về dạng tổng các phân thức đơn giản, dựa vào các thừa số của Q :

$$x + a \to \frac{A}{x+a}, (x+a)^n \to \frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x+a)^n}$$

$$ax^2 + bx + c(\Delta < 0) \to \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{ax^2+bx+c}\left(\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}(\Delta < 0) = \int du/(u^2+a^2) : \text{đặt } u = atgt\right)$$

5. Tính diện tích hình phẳng :

a. D giới hạn bởi x = a, x = b, (Ox), (C) : y = f(x) : $S_D = \int_a^b |f(x)|dx$

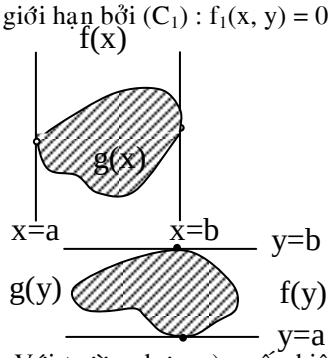
f(x) : phân thức hữu tỉ : lập BXD f(x) trên [a,b] để mở $|.|$; f(x) : hàm lượng giác : xét dấu f(x) trên cung [a, b] của đường tròn lượng giác.

b. D giới hạn bởi x = a, x = b , (C) : y = f(x)

(C') : y = g(x) : $S_D = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

Xét dấu f(x) – g(x) như trường hợp a/.

c. D giới hạn bởi (C_1) : $f_1(x, y) = 0$, (C_2) : $f_2(x, y) = 0$



α / $S_D = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

β / $S_D = \int_a^b |f(y) - g(y)|dy$

Với trường hợp α) : nếu biên trên hay biên dưới bị gãy, ta cắt D bằng các đường thẳng đứng ngay chỗ gãy.

Với trường hợp β) : nếu biên phải hay biên trái bị gãy, ta cắt D bằng các đường ngang ngay chỗ gãy.

Chọn tính $\int$ theo dx hay dy để $\int$ dễ tính toán hay D ít bị chia cắt.

Cần giải các hệ phương trình tọa độ giao điểm.

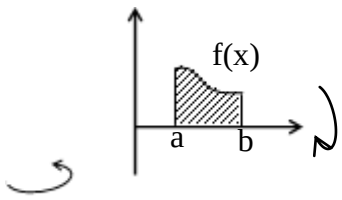
Cần biết vẽ đồ thị các hình thường gặp : các hàm cơ bản, các đường tròn, (E) , (H), (P), hàm lượng giác, hàm mũ, hàm $|.|$.

Cần biết rút y theo x hay x theo y từ công thức f(x,y) = 0 và biết chọn $+\sqrt{\ }$ hay $-\sqrt{\ }$ $\left(y = ... + \sqrt{\ } : \text{trên}, y = ... - \sqrt{\ } : \text{dưới}, x = ... + \sqrt{\ } : \text{phải}, x = ... - \sqrt{\ } : \text{trái}\right)$

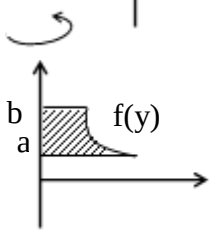
6. Tính thể tích vật thể tròn xoay :

a. D như 5.a/ xoay quanh (Ox) :

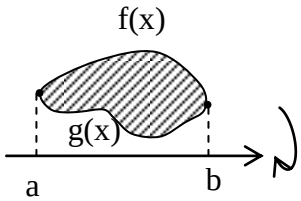
$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

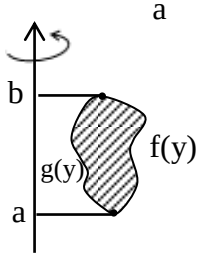


b. $$V = \pi\int_a^b [f(y)]^2 dy$$



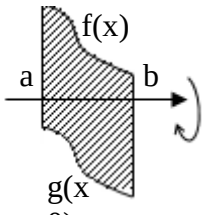
c. $$V = \pi\int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]dx$$

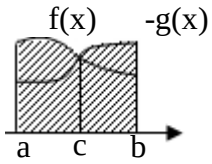




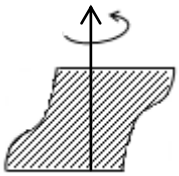
d. $V = \pi\int_a^b [f^2(y) - g^2(y)]dy$

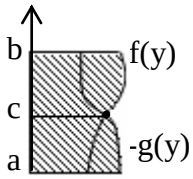
e. $V = \pi\int_a^c f^2(x)dx + \pi\int_c^b g^2(x)dx$





f. $V = \pi\int_a^c g^2(y)dy + \pi\int_c^b f^2(y)dy$





Chú ý : xoay quanh (Ox) : ∫ ...dx ; xoay quanh (Oy) : ∫ ... dy.

V- KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Tìm lim dạng $\frac{0}{0}$, dạng 1^∞ :

a. Phân thức hữu tỷ : $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}(\text{dạng } 0/0) = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \lim_{x\to a}\frac{P_1}{Q_1}$

b. Hàm lg : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}(\text{dạng } 0/0)$, dùng công thức $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$

c. Hàm chứa căn : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}(\text{dạng } 0/0)$, dùng lượng liên hiệp :

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ để phá $\sqrt{\ }$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ để phá $\sqrt[3]{\ }$

d. Hàm chứa mũ hay log (dạng 1^∞) : dùng công thức $\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e$

2. Đạo hàm :

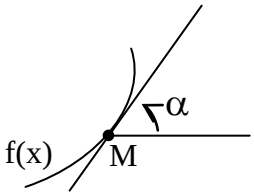
a. Tìm đạo hàm bằng định nghĩa : $f'(x_0) = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$

Tại điểm x_o mà f đổi công thức, phải tìm đạo hàm từng phía :

$f'_+(x_o) = \lim_{x\to x_o^+}$, $f'_-(x_o) = \lim_{x\to x_o^-}$. Nếu $f'_+(x_o) = f'_-(x_o)$ thì f có đạo hàm tại x_o.

b. Ý nghĩa hình học :

$k = tg\alpha = f'(x_M)$



c. $f' + : f\uparrow$, $f' - : f\downarrow$

$f'' + : f$ lõm , $f'' - : f$ lồi

d. f đạt CĐ tại M $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_M) = 0 \\ f''(x_M) < 0 \end{cases}$

f đạt CT tại M $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_M) = 0 \\ f''(x_M) > 0 \end{cases}$

M là điểm uốn của f $\Leftrightarrow f''(x_M) = 0$ và f'' đổi dấu khi qua x_M.

e. Tính đạo hàm bằng công thức : $C' = 0$, $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $(\ln x)' = 1/x$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x.\ln a$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\mathrm{tg}x)' = 1/\cos^2 x$,
$(\mathrm{cotg}x)' = -1/\sin^2 x$, $(ku)' = ku'$, $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $(uv)' = u'v + uv'$,
$(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$

* Hàm hợp : $(g_o f)' = g'[f(x)] \,.\, f'(x)$

* Đạo hàm lôgarit : lấy log (ln : cơ số e) 2 vế , rồi đạo hàm 2 vế; áp dụng với hàm $[f(x)]^{g(x)}$ hay f(x) dạng tích, thương, chứa $\sqrt[n]{\ }$ ...

f. Vi phân : $du = u'dx$

3. Tiệm cận :

$\lim\limits_{x\to a} y = \infty \Rightarrow x =$ a : tcđ

x	a	
y	∞ ‖	∞

$\lim\limits_{x\to\infty} y = b \Rightarrow y = b$: tcn

x	$-\infty$	$+\infty$
y	b	b

$\lim\limits_{x\to\infty}[y-(ax+b)] = 0 \Rightarrow y = ax + b$: tcx

x	$-\infty$	$+\infty$
y	∞	∞

* Vẽ đồ thị có tiệm cận :

- t c đ : khi y càng tiến về $\pm\infty$ thì đường cong càng gần đường t c .
- t c x :khi x và y càng tiến về $\pm\infty$ thì đường cong càng gần đường t c.
- t c n :khi x càng tiến về $\pm\infty$ thì đường cong càng gần đường t c.

* Xét $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

- Có tcđ x = a khi Q(a) = 0, P(a) ≠ 0
- Có tcn khi bậc P ≤ bậc Q : với $x \to \infty$, tìm lim y bằng cách lấy số hạng bậc cao nhất của P chia số hạng bậc cao nhất của Q.
- Có tcx khi P hơn Q 1 bậc, khi đó chia đa thức ta có : $f(x) = ax + b + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$, tcx là y = ax + b. Nếu Q = x – α, có thể chia Honer.

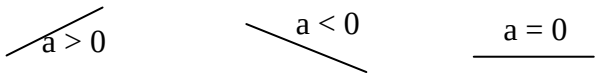
* Biện luận tiệm cận hàm bậc 2 / bậc 1 :

$$y = ax + b + \frac{c}{dx+e} \quad (d \neq 0)$$

- a ≠ 0, c ≠ 0 : có tcđ, tcx
- a = 0, c ≠ 0 : có tcn, tcđ.
- c = 0 : (H) suy biến thành đt, không có tc.

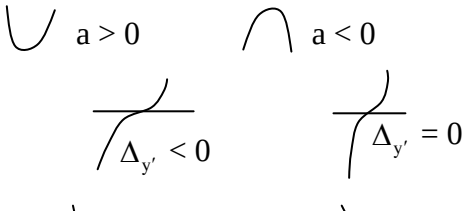
4. Đồ thị các hàm thường gặp :

a/ y = ax + b :



b/ $y = ax^2 + bx + c$

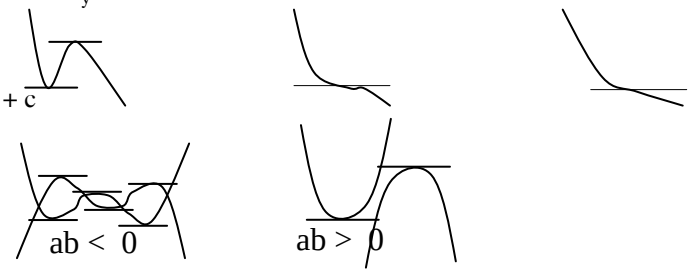
c/ $y = ax^3 + bx^2 + c + d$



a> 0 :

a < 0 :

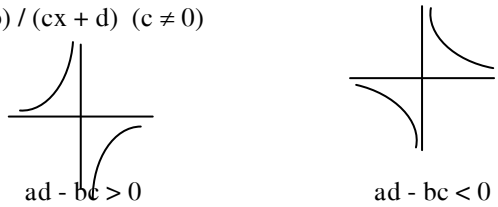
d/ $y = ax^4 + bx^2 + c$



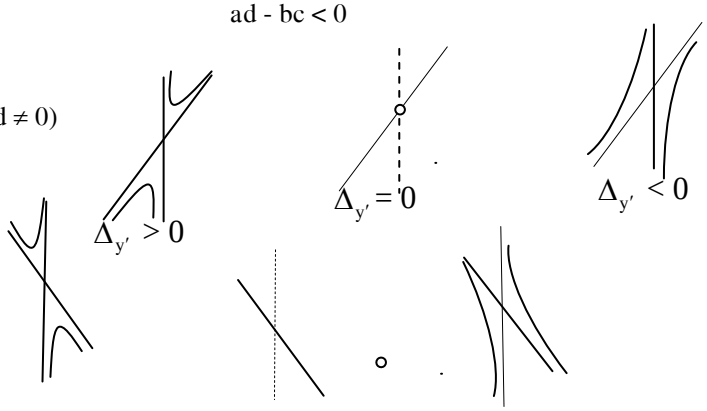
a > 0

a < 0

e/ $y = (ax + b) / (cx + d)$ $(c \neq 0)$



f/ $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ $(ad \neq 0)$



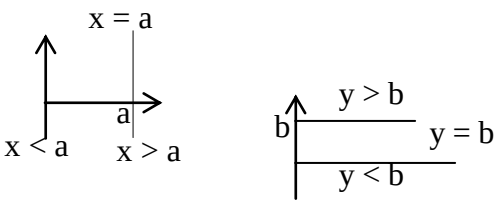
ad > 0

ad < 0

5. ĐỐI XỨNG ĐỒ THỊ :

g(x) = f(–x) : đx qua (Oy)

g(x) = – f(x) : đx qua (Ox)



(C/) : $y = |f(x)|$: giữ nguyên phần (C) bên trên y = 0, lấy phần (C) bên dưới y = 0 đối xứng qua (Ox).

(C/) : $y = f(|x|)$: giữ nguyên phần (C) bên phải x = 0, lấy phần (C) bên phải x = 0 đối xứng qua (Oy).

6. ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA (Cm) : y = f(x, m)

a/ Điểm cố định : $M(x_o, y_o) \in (Cm)$, $\forall m \Leftrightarrow y_o = f(x_o, m)$, $\forall m \Leftrightarrow Am + B = 0$, $\forall m$ (hay $Am^2 + Bm + C = 0$, $\forall m$) $\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ (hay $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$). Giải hệ, được M.

b/ Điểm (Cm) không đi qua, $\forall m$: $M(x_o, y_o) \notin (Cm)$, $\forall m \Leftrightarrow y_o \neq f(x_o,m)$, $\forall m \Leftrightarrow y_o = f(x_o, m)$ VN m $\Leftrightarrow$ Am + B = 0 VN m (hay $Am^2 + Bm + C = 0$ VN m) $\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$ (hay $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$). Giải hệ , được M.

Chú ý : $\dfrac{A}{B} = C$ VN $\Leftrightarrow B = 0 \vee \begin{cases} B \neq 0 \\ A = BC \text{ VN} \end{cases}$

c/ Điểm có n đường cong của họ (Cm) đi qua : Có n đường (Cm) qua $M(x_o, y_o) \Leftrightarrow y_o = f(x_o, m)$ có n nghiệm m. Cần nắm vững điều kiện có n nghiệm của các loại phương trình : bậc 2, bậc 2 có điều kiện $x \neq \alpha$, bậc 3, trùng phương.

7. TIẾP XÚC, PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN :

a. (C) : y = f(x), tx ($C^/$) : y = g(x) khi hệ phương trình sau có nghiệm : $\begin{cases} y_C = y_{C^/} \\ y^/_C = y^/_{C^/} \end{cases}$. Nghiệm x của hệ là hoành độ tiếp điểm.

b. Tìm tiếp tuyến với (C) : y = f(x)

* Tại $M(x_o, y_o)$: $y = f'(x_o)(x - x_o) + y_o$.

* Qua M (x_o, y_o): viết phương trình đường thẳng qua M : (d) : $y = k(x - x_o) + y_o$. Dùng điều kiện tx tìm k. Số lượng k = số lượng tiếp tuyến (nếu f bậc 3 hay bậc 2 / bậc 1 thì số nghiệm x trong hệ phương trình đk tx = số lượng tiếp tuyến).

* // (Δ) : y = ax + b : (d) // (Δ) $\Rightarrow$ (d) : y = ax + m. Tìm m nhờ đk tx.

* $\perp$ (Δ) : y = ax + b ($a \neq 0$) : (d) $\perp$ (Δ) $\Rightarrow$ (d) : $y = -\dfrac{1}{a}x + m$. Tìm m nhờ đk tx.

c. Bài toán số lượng tiếp tuyến : tìm M $\in$ ($C^/$) : g(x, y) = 0 sao cho từ M kẻ được đến (C) đúng n tiếp tuyến (n = 0, 1, 2, ...), $M(x_o,y_o) \in (C^/) \Leftrightarrow g(x_o,y_o) = 0$; (d) qua M : $y = k(x - x_o) + y_o$; (d) tx (C) : $\begin{cases} y_C = y_d \\ y^/_C = k \end{cases}$ (1). Thế k vào (1) được phương trình ẩn x, tham số x_o hay y_o. Đặt đk để phương trình này có n nghiệm x (số nghiệm x = số tiếp tuyến), tìm được x_o hay y_o.

8. TƯƠNG GIAO :

* Phương trình hđ điểm chung của (C) : y = f(x) và ($C^/$) : y = g(x) là : f(x) = g(x). Số nghiệm pt = số điểm chung.

* Tìm m để (C_m) : y = f(x, m) và ($C^/_m$) : y = g(x, m) có n giao điểm : Viết phương trình hoành độ điểm chung; đặt đk để pt có n nghiệm. Nếu pt hoành độ điểm chung tách được m sang 1 vế : F(x) = m : đặt điều kiện để (C) : y = F(x) và (d) : y = m có n điểm chung.

* Biện luận sự tương giao của (C_m) và ($C^/_m$) :

• Nếu pt hđ điểm chung dạng : F(x) = m : lập BBT của F; số điểm chung của (C_m) và ($C^/_m$) = số điểm chung của (C) và (d).

• PThđ điểm chung, không tách được m, dạng $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($x \neq \alpha$) hay dạng bậc 3 : $x = \alpha \vee f(x) = 0$: lập Δ, xét dấu Δ, giải pt f(x) = 0 để biết m nào thì α là nghiệm của f, với m đó, số nghiệm bị bớt đi 1.

9. CỰC TRỊ :

* f có đúng n cực trị $\Leftrightarrow f^/$ đổi dấu n lần.

* f đạt cực đại tại $x_o \Leftrightarrow \begin{cases} f^/(x_o) = 0 \\ f^{//}(x_o) < 0 \end{cases}$

f đạt cực tiểu tại $x_o \Leftrightarrow \begin{cases} f^/(x_o) = 0 \\ f^{//}(x_o) > 0 \end{cases}$

* f bậc 3 (hay bậc 2 / bậc 1) có cực trị ⇔ f có CĐ và CT ⇔ $\Delta_{f'} > 0$

* f bậc 3 (hay bậc 2 / bậc 1) có cực trị :

- Bên phải (d) : $x = \alpha \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm $\alpha < x_1 < x_2$.
- Bên trái (d) : $x = \alpha \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm $x_1 < x_2 < \alpha$.
- 1 bên (Ox) ⇔ $\begin{cases} \Delta_{f'} > 0 \\ y_{CD}.y_{CT} > 0 \end{cases}$
- 2 bên (Ox) ⇔ $\begin{cases} \Delta_{f'} > 0 \\ y_{CD}.y_{CT} < 0 \end{cases}$

* Với hàm bậc 2 / bậc 1, các điều kiện $y_{CĐ}.y_{CT} < 0$ (>0) có thể thay bởi y = 0 VN (có 2 nghiệm.).

* Tính $y_{CĐ}.y_{CT}$:

- Hàm bậc 3 : $y = y'(Ax + B) + (Cx + D)$

  $y_{CĐ}.y_{CT} = (Cx_{CĐ} + D).(Cx_{CT} + D)$, dùng Viète với pt $y' = 0$.
- Hàm bậc 2/ bậc 1 : $y = \dfrac{u}{v}$

  $y_{CĐ}.y_{CT} = \dfrac{u'(x_{CĐ}).u'(x_{CT})}{v'(x_{CĐ}).v'(x_{CT})}$, dùng Viète với pt $y' = 0$.

* Đường thẳng qua CĐ, CT :

- Hàm bậc 3 : $y = Cx + D$
- Hàm bậc 2 / bậc 1 : $y = u' / v'$

* $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 1 cực trị ⇔ $ab \geq 0$, 3 cực trị ⇔ $ab < 0$

10. ĐƠN ĐIỆU :

a. Biện luận sự biến thiên của hàm bậc 3 :

i) $a > 0$ và $y' = 0$ vô nghiệm ⇒ hàm số tăng trên R (luôn luôn tăng)

ii) $a < 0$ và $y' = 0$ vô nghiệm ⇒ hàm số giảm (nghịch biến) trên R (luôn luôn giảm)

iii) $a > 0$ và $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $x_1 < x_2$

⇒ hàm số đạt cực đại tại x_1 và đạt cực tiểu tại x_2.

Ngoài ra ta còn có :

+ $x_1 + x_2 = 2x_0$ với x_0 là hoành độ điểm uốn.
+ hàm số tăng trên $(-\infty, x_1)$
+ hàm số tăng trên $(x_2, +\infty)$
+ hàm số giảm trên (x_1, x_2)

iv) $a < 0$ và $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $x_1 < x_2$

⇒ hàm đạt cực tiểu tại x_1 và đạt cực đại tại x_2 thỏa điều kiện $x_1 + x_2 = 2x_0$ (x_0 là hoành độ điểm uốn). Ta cũng có :

+ hàm số giảm trên $(-\infty, x_1)$
+ hàm số giảm trên $(x_2, +\infty)$
+ hàm số tăng trên (x_1, x_2)

b. Biện luận sự biến thiên của $y = \dfrac{\text{bậc2}}{\text{bậc1}}$

i) Nếu $a.m > 0$ và $y' = 0$ vô nghiệm thì hàm tăng (đồng biến) trên từng khỏang xác định.

ii) Nếu $a.m < 0$ và $y' = 0$ vô nghiệm thì hàm giảm (nghịch biến) trên từng khỏang xác định.

iii) Nếu $a.m > 0$ và $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì hàm đạt cực đại tại x_1 và đạt cực tiểu tại x_2 thỏa $x_1 < x_2$

và $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{p}{m}$.

iv) Nếu a.m < 0 và $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì hàm đạt cực tiểu tại x_1 và đạt cực đại tại x_2 thỏa $x_1 < x_2$ và $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{p}{m}$.

c. Tìm m để hàm số bậc 3, bậc 2/bậc 1 đồng biến (nghịch biến) trên miền $x \in I$: đặt đk để I nằm trong miền đồng biến (nghịch biến) của các BBT trên; so sánh nghiệm pt bậc 2 $y' = 0$ với α.

11. BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM PT BẰNG ĐỒ THỊ :

a. Cho pt : F(x, m) = 0; tách m sang 1 vế : f(x) = m; lập BBT của f (nếu f đã khảo sát thì dùng đồ thị của f), số nghiệm = số điểm chung.

b. Với pt mũ, log, $\sqrt{\ }$, $|.|$, lượng giác : đổi biến; cần biết mỗi biến mới t được mấy biến cũ x; cần biết đk của t để cắt bớt đồ thị f.

12. QUỸ TÍCH ĐIỂM DI ĐỘNG $M(x_o, y_o)$:

Dựa vào tính chất điểm M, tìm 2 đẳng thức chứa x_o, y_o, m; khử m, được $F(x_o, y_o) = 0$; suy ra $M \in (C)$: F(x, y) = 0; giới hạn quỹ tích : M tồn tại ⇔ m ? ⇔ x_o ? (hay y_o ?)

- Nếu $x_o = a$ thì $M \in (d)$: x = a.
- Nếu $y_o = b$ thì $M \in (d)$: y = b.

13. TÂM, TRỤC, CẶP ĐIỂM ĐỐI XỨNG :

a. CM hàm bậc 3 có tâm đx (điểm uốn), hàm bậc 2/bậc 1 có tâm đx (gđ 2 tc) tại I : đổi tọa độ : $x = X + x_I$, $y = Y + y_I$; thế vào hàm số : Y = F(X), cm : F(−x) = − F(x), suy ra F là hàm lẻ, đồ thị có tđx là gốc tọa độ I.

b. CM hàm bậc 4 có trục đx // (Oy) : giải pt $y' = 0$; nếu x = a là nghiệm duy nhất hay là nghiệm chính giữa của 3 nghiệm : đổi tọa độ x = X + a, y = Y; thế vào hàm số : Y = F(X); cm F(−X) = F(X); suy ra F là hàm chẵn, đồ thị có trục đối xứng là trục tung X = 0, tức x = a.

c. Tìm trên (C) : y = f(x) cặp điểm M, N đối xứng qua I : giải hệ 4 pt 4 ẩn :

$$\begin{cases} x_M + x_N = 2x_I \\ y_M + y_N = 2y_I \\ y_M = f(x_M) \\ y_N = f(x_N) \end{cases}$$

d. Tìm trên (C) : y = f(x) cặp điểm đ/x qua đt (d) : y = ax + b : dt ⊥ (d) là (d') : $y = -\frac{1}{a}x + m$; lập pt hđ điểm chung của (C) và (d'); giả sử pt có 2 nghiệm x_A, x_B, tính tọa độ trung điểm I của AB theo m; A, B đối xứng qua (d) ⇔ I ∈ (d) ⇔ m?; thay m vào pthđ điểm chung, giải tìm x_A, x_B, suy ra y_A, y_B.

14. Tìm điểm $M \in (C) : y = ax + b + \frac{c}{dx + e}$ có tọa độ nguyên (a, b, c, d, e ∈ Z) : giải hệ

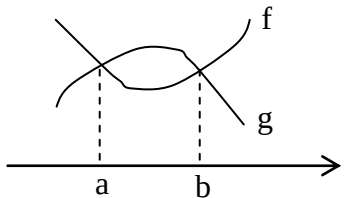
$$\begin{cases} y_M = ax_M + b + \dfrac{c}{dx_M + e} \\ x_M, y_M \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M = ax_M + b + \dfrac{c}{dx_M + e} \\ x_M, \dfrac{c}{dx_M + e} \in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_M = ax_M + b + \dfrac{c}{dx_M + e} \\ x_M \in Z, dx_M + e = \text{ước số của } c \end{cases}$$

15. Tìm min, max của hàm số y = f(x)

Lập BBT, suy ra miền giá trị và min, max.

16. Giải bất phương trình bằng đồ thị :



$f < g \Leftrightarrow a < x < b$, $f > g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < a \\ b < x \end{array}\right.$

$f \le g \Leftrightarrow a \le x \le b$, $f \ge g \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le a \\ x \ge b \end{array}\right.$

VI- HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

1. Tọa độ , vectơ :

* $(a,b) \pm (a', b') = (a \pm a', b \pm b')$

$k(a, b) = (ka, kb)$

$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

$(a, b).(a',b') = aa' + bb'$

$$|(a,b)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$cos(\vec{v},\vec{v}') = \frac{\vec{v}.\vec{v}'}{|\vec{v}|.|\vec{v}'|}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A), AB = |\overrightarrow{AB}|$$

M chia AB theo tỉ số k $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k}$, $y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}$ $(k \ne 1)$

M : trung điểm AB $\Leftrightarrow x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

M : trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$

(tương tự cho vectơ 3 chiều).

* Vectơ 3 chiều có thêm tích có hướng và tích hỗn hợp :

$$\vec{v} = (a,b,c), \vec{v}' = (a',b',c')$$

$$[\vec{v},\vec{v}'] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right)$$

$$[\vec{v},\vec{v}'] = |\vec{v}|.|\vec{v}'|.sin(\vec{v},\vec{v}')$$

$$[\vec{v},\vec{v}'] \perp \vec{v},\vec{v}'$$

* $\vec{v} \perp \vec{v}' \Leftrightarrow \vec{v}.\vec{v}' = 0$; $\vec{v} // \vec{v}' \Leftrightarrow [\vec{v},\vec{v}'] = 0$; $\vec{v},\vec{v}',\vec{v}''$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow [\vec{v},\vec{v}'].\vec{v}'' = 0$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}\right|$$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA'}\right|$

A, B, C thẳng hàng ⇔ $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$

* Δ trong mp : H là trực tâm ⇔ $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

H là chân đường cao h_a ⇔ $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH} // \overrightarrow{BC}\end{cases}$

M là chân phân giác trong $\hat{A}$ ⇔ $\overrightarrow{MB} = -\dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{MC}$

M là chân phân giác ngòai $\hat{A}$ ⇔ $\overrightarrow{MB} = +\dfrac{AB}{AC}\overrightarrow{MC}$

I là tâm đường tròn ngoại tiếp ⇔ IA = IB = IC.

I là tâm đường tròn nội tiếp ⇔ I là chân phân giác trong $\hat{B}$ của ΔABM với M là chân phân giác trong $\hat{A}$ của ΔABC.

2. Đường thẳng trong mp :

* Xác định bởi 1 điểm $M(x_o,y_o)$ và 1vtcp $\vec{v}$ = (a,b) hay 1 pháp vectơ (A,B) :

(d) : $\begin{cases}x = x_o + at\\ y = y_o + bt\end{cases}$, $(d): \dfrac{x-x_o}{a} = \dfrac{y-y_o}{b}$

(d) : $A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0$

* (d) qua A(a, 0); B(0,b) : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

* (AB) : $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} = \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$

* (d) : Ax + By + C = 0 có $\vec{v} = (-B,A)$; $\vec{n} = (A,B)$

* (d) // (Δ) : Ax + By + C = 0 ⇒ (d) : Ax + By + C' = 0

* (d) ⊥ (Δ) ⇒ (d) : – Bx + Ay + C' = 0

* (d), (d') tạo góc nhọn φ thì :

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_d}.\overrightarrow{n_{d'}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_{d'}}\right|} \quad \left(\neq \cos(\overrightarrow{n_d},\overrightarrow{n_{d'}})\right)$$

* $d(M,(d)) = \dfrac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

* Phân giác của (d) : Ax + By + C = 0 và (d') : $A'x + B'y + C'$ = 0 là :

$$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \pm\frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

$\overrightarrow{n_d}.\overrightarrow{n_{d'}} > 0$: phân giác góc tù + , nhọn –

$\overrightarrow{n_d}.\overrightarrow{n_{d'}} < 0$: phân giác góc tù – , nhọn +

* Tương giao : Xét hpt tọa độ giao điểm.

3. Mặt phẳng trong không gian :

* Xác định bởi 1 điểm $M(x_o, y_o, z_o)$ và 1 pháp vectơ : $\vec{n} = (A, B, C)$ hay 2 vtcp $\vec{v}, \vec{v'}$.

  (P) : $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$

  $\vec{n} = [\vec{v}, \vec{v'}]$

  (P) : $Ax + By + Cz + D = 0$ có $\vec{n} = (A, B, C)$.

  (P) qua A(a,0,0); B(0,b,0); C(0,0,c) $\Leftrightarrow$ (P) : $x/a + y/b + z/c = 1$

* Cho $M(x_o, y_o, z_o)$, (P) : $Ax + By + Cz + D = 0$

  $$d(M,(P)) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

* (P) , (P/) tạo góc nhọn φ thì : $\cos\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(P')}})\right|$

* (P) ⊥ (P/) ⇔ $\overrightarrow{n_{(P)}} \perp \overrightarrow{n_{(P')}}$, (P) // (P/) ⇔ $\overrightarrow{n_{(P)}} // \overrightarrow{n_{(P')}}$

4. Đường thẳng trong không gian :

* Xác định bởi 1 điểm $M(x_o, y_o, z_o)$ và 1 vtcp $\vec{v} = (a, b, c)$ hay 2 pháp vectơ : $\vec{n}, \vec{n'}$:

  $$(d) : \begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases}, (d) : \frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

  $$\vec{v} = [\vec{n}, \vec{n'}]$$

* (AB) : $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{z - z_A}{z_B - z_A}$

* (d) = (P) ∩ (P/) : $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$

* (d) qua A, vtcp $\vec{v}$ thì :

  $$d(M,(d)) = \frac{|[\overrightarrow{AM}, \vec{v}]|}{|\vec{v}|}$$

* φ là góc nhọn giữa (d), (d/) thì :

  $$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{v_d}, \vec{v_{d/}})\right|$$

* φ là góc nhọn giữa (d), (P) thì :

  $$\sin\varphi = \left|\cos(\vec{v_d}, \vec{n_p})\right|$$

* (d) qua M, vtcp $\vec{v}$, (P) có pvt $\vec{n}$:

  (d) cắt (P) ⇔ $\vec{v}.\vec{n} \neq 0$

  (d) // (P) ⇔ $\vec{v}.\vec{n} = 0$ và $M \notin (P)$

  (d) ⊂ (P) ⇔ $\vec{v}.\vec{n} = 0$ và $M \in (P)$

* (d) qua A, vtcp $\vec{v}$; (d/) qua B, vtcp $\vec{v'}$:

  (d) cắt (d/) ⇔ $[\vec{v}, \vec{v'}] \neq \vec{0}$, $[\vec{v}, \vec{v'}]\overrightarrow{AB} = 0$

(d) // (d') ⇔ $[\vec{v}, \vec{v'}] = \vec{0}$, A ∉ (d')

(d) chéo (d') ⇔ $[\vec{v}, \vec{v'}] \neq \vec{0}$, $[\vec{v}, \vec{v'}]\overrightarrow{AB} \neq 0$

(d) ≡ (d') ⇔ $[\vec{v}, \vec{v'}] = \vec{0}$, A ∈ (d')

* (d) chéo (d') : $d(d, d') = \dfrac{\left|[\vec{v}, \vec{v'}]\overrightarrow{AB}\right|}{\left|[\vec{v}, \vec{v'}]\right|}$

* (d) chéo (d') , tìm đường ⊥ chung (Δ) : tìm $\vec{n} = [\vec{v}, \vec{v'}]$; tìm (P) chứa (d), // $\vec{n}$; tìm (P') chứa (d'), // $\vec{n}$; (Δ) = (P) ∩ (P').
* (d) ⊥ (P), cắt (d') ⇒ (d) nằm trong mp ⊥ (P), chứa (d').
* (d) qua A, // (P) ⇒ (d) nằm trong mp chứa A, // (P).
* (d) qua A, cắt (d') ⇒ (d) nằm trong mp chứa A, chứa (d').
* (d) cắt (d'), // (d'') ⇒ (d) nằm trong mp chứa (d'), // (d'').
* (d) qua A, ⊥ (d') ⇒ (d) nằm trong mp chứa A, ⊥ (d').
* Tìm hc H của M xuống (d) : viết pt mp (P) qua M, ⊥ (d), H = (d) ∩ (P).
* Tìm hc H của M xuống (P) : viết pt đt (d) qua M, ⊥ (P) : H = (d) ∩ (P).
* Tìm hc vuông góc của (d) xuống (P) : viết pt mp (Q) chứa (d), ⊥ (P); (d') = (P) ∩ (Q)
* Tìm hc song song của (d) theo phương (Δ) xuống (P) : viết pt mp (Q) chứa (d) // (Δ); (d') = (P) ∩ (Q).

5. Đường tròn :

* Đường tròn (C) xác định bởi tâm I(a,b) và bk R : (C) : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$
* (C) : $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ có tâm I(–A,–B), bk R = $\sqrt{A^2 + B^2 - C}$
* (d) tx (C) ⇔ d(I, (d)) = R, cắt ⇔ < R, không cắt ⇔ > R.
* Tiếp tuyến với (C) tại $M(x_o,y_o)$: phân đôi t/độ trong (C) : $(x_o-a)(x-a) + (y_o-b)(y-b) = R$ hay $x_ox + y_oy + A(x_o + x) + B(y_o + y) + C = 0$
* Cho (C) : $F(x,y) = x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ thì $P_M/(C) = F(x_M, y_M) = \overline{MA}.\overline{MB} = MT^2 = MI^2 - R^2$ với MAB : cát tuyến, MT : tiếp tuyến ; M ∈ (C) ⇔ $P_M/(C) = 0$, M trong (C) ⇔ $P_M/(C) < 0$, ngoài ⇔ > 0.
* Trục đẳng phương của (C) và (C') :$2(A - A')x + 2(B - B')y + (C - C') = 0$
* (C), (C') ngoài nhau ⇔ II' > R + R' : (có 4 tiếp tuyến chung); tx ngoài ⇔ = R + R' (3 tiếp tuyến chung); cắt ⇔ $\left|R - R'\right|$ < II' < R + R' (2 tt chung); tx trong ⇔ = $\left|R - R'\right|$ (1 tt chung là trục đẳng phương) chứa nhau ⇔ < $\left|R - R'\right|$ (không có tt chung).

6. Mặt cầu :

* Mc (S) xđ bởi tâm I (a, b, c) và bk R : (S) : $(x - a)^2 + (y - b^2) + (z - c)^2 = R^2$.
* (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ có tâm I(–A,–B,–C), bk R = $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$
* (P) tx (S) ⇔ d(I,(P)) = R, cắt ⇔ < R, không cắt ⇔ > R.
* Pt tiếp diện với (S) tại M : phân đôi tđộ (S).
* Cho (S) : F(x, y, z) = 0. $P_M/(S) = F(x_M, y_M, z_M)$; $P_M/(S) = 0$ ⇔ M ∈ (S), < 0 ⇔ M trong (S), > 0 ⇔ M ngoài (S).
* Mặt đẳng phương của (S) và (S') : $2(A - A')x + 2(B - B')y + 2(C - C')z + (D - D') = 0$
* Tương giao giữa (S), (S') : như (C), (C').
* Khi (S), (S') tx trong thì tiết diện chung là mặt đẳng phương.
* Khi (S), (S') cắt nhau thì mp qua giao tuyến là mặt đẳng phương.

7. Elip : * cho F_1, F_2, $F_2F_2 = 2c$, cho a > c > 0

$M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$.

* (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a > b > 0) : tiêu điểm : $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$; đỉnh $A_1(-a,0)$; $A_2(a,0)$; $B_1(0,-b)$; $B_2(0,b)$; tiêu cự : $F_1F_2 = 2c$, trục lớn $A_1A_2 = 2a$; trục nhỏ $B_1B_2 = 2b$; tâm sai $e = c/a$; đường chuẩn $x = \pm a/e$; bk qua tiêu : $MF_1 = a + ex_M$, $MF_2 = a - ex_M$; tt với (E) tại M : phân đôi tọa độ (E), (E) tx (d) : $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$; $a^2 = b^2 + c^2$.

* (E) : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (a > b > 0) : không chính tắc; tiêu điểm : $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$; đỉnh $A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$, $B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$, tiêu cự : $F_1F_2 = 2c$; trục lớn $A_1A_2 = 2a$; trục nhỏ $B_1B_2 = 2b$; tâm sai $e = c/a$; đường chuẩn $y = \pm a/e$; bán kính qua tiêu $MF_1 = a + ey_M$, $MF_2 = a - ey_M$; tiếp tuyến với (E) tại M : phân đôi tọa độ (E); (E) tiếp xúc (d) : $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow a^2B^2 + b^2A^2 = C^2$; $a^2 = b^2 + c^2$ (Chú ý : tất cả các kết quả của trường hợp này suy từ trường hợp chính tắc trên bằng cách thay x bởi y, y bởi x).

8. Hypebol :

* Cho F_1, F_2, $F_2F_2 = 2c$, cho $0 < a < c$.

$M \in (H) \Leftrightarrow |MF_1 - MF_2| = 2a$

(H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (pt chính tắc)

tiêu điểm $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$; đỉnh tr.thực $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$; đỉnh trục ảo $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$; tiêu cự $F_1F_2 = 2c$; độ dài trục thực $A_1A_2 = 2a$; độ dài trục ảo $B_1B_2 = 2b$; tâm sai : $e = c/a$; đường chuẩn : $x = \pm a/e$; bán kính qua tiêu : $M \in$ nhánh phải $MF_1 = ex_M + a$, $MF_2 = ex_M - a$, $M \in$ nhánh trái $MF_1 = -ex_M - a$, $MF_2 = -ex_M + a$; tiếp tuyến với (H) tại M : phân đôi tọa độ (H);

(H) tx (d) : $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow a^2A^2 - b^2B^2 = C^2 > 0$; tiệm cận $y = \pm \frac{b}{a}x$

hình chữ nhật cơ sở : $x = \pm a$, $y = \pm b$; $c^2 = a^2 + b^2$.

(H) : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (pt không chính tắc)

tiêu điểm $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$; đỉnh trục thực $A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$; đỉnh trục ảo $B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$; tiêu cự $F_1F_2 = 2c$; độ dài trục thực $A_1A_2 = 2a$; độ dài trục ảo $B_1B_1 = 2b$; tâm sai : $e = c/a$; đường chuẩn : $y = \pm a/e$; bán kính qua tiêu : $M \in$ nhánh trên $MF_1 = ey_M + a$, $MF_2 = ey_M - a$; $M \in$ nhánh dưới $MF_1 = -ey_M - a$, $MF_2 = -ey_M + a$; tiếp tuyến với (H) tại M : phân đôi tọa độ (H);

(H) tx (d) : $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow a^2B^2 - b^2A^2 = C^2 > 0$; tiệm cận $x = \pm \frac{b}{a}y$

hình chữ nhật cơ sở : $y = \pm a$, $x = \pm b$; $c^2 = a^2 + b^2$ (chú ý : tất cả các kết quả của trường hợp này suy từ trường hợp chính tắc bằng cách thay x bởi y, y bởi x).

9. Parabol : * Cho F, $F \notin (\Delta)$

$M \in (P) \Leftrightarrow MF = d(M,(\Delta))$

(P) : $y^2 = 2px$ (p > 0) (phương trình chính tắc).

tiêu điểm (p/2, 0), đường chuẩn $x = -p/2$; bán kính qua tiêu $MF = p/2 + x_M$; tâm sai $e = 1$, tiếp tuyến với (P) tại M : phân đôi tọa độ; (P) tx (d) : $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow pB^2 = 2AC$ (p : hệ số của x trong (P) đi với B : hệ số của y trong (d)); tham số tiêu : p.

(P) : $y^2 = -2px$ (p > 0) (phương trình không chính tắc).

tiêu điểm (–p/2, 0), đường chuẩn $x = p/2$; bán kính qua tiêu $MF = p/2 - x_M$; tâm sai $e = 1$, tiếp tuyến với (P) tại M : phân đôi tọa độ; (P) tx (d) : $Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow pB^2 = -2AC$.

(P) : $x^2 = 2py$ (p > 0) (phương trình không chính tắc).

tiêu điểm (0, p/2), đường chuẩn y = – p/2; bán kính qua tiêu MF = p/2 + y_M; tâm sai e = 1, tiếp tuyến với (P) tại M : phân đôi tọa độ; (P) tx (d) : Ax + By + C = 0 ⇔ $pA^2 = 2BC$ (p : hệ số của y trong (P) đi với A : hệ số của x trong (d)).

(P) : $x^2 = -2py$ (p > 0) (phương trình không chính tắc).

tiêu điểm (0, – p/2), đường chuẩn y = p/2; bán kính qua tiêu MF = p/2 – y_M; tâm sai e = 1, tiếp tuyến với (P) tại M : phân đôi tọa độ;

(P) tx (d) : Ax + By + C = 0 ⇔ $pA^2 = -2BC$.

CHÚ Ý :

* Cần có quan điểm giải tích khi làm toán hình giải tích : đặt câu hỏi cần tìm gì? (điểm trong mp $M(x_o,y_o)$: 2 ẩn ; điểm trong không gian (3 ẩn); đường thẳng trong mp Ax + By + C = 0 : 3 ẩn A, B, C - thực ra là 2 ẩn; đường tròn : 3 ẩn a, b, R hay A, B, C; (E) : 2 ẩn a, b và cần biết dạng ; (H) : như (E); (P) : 1 ẩn p và cần biết dạng; mp (P) : 4 ẩn A, B, C, D; mặt cầu (S) : 4 ẩn a, b, c, R hay A, B, C, D; đường thẳng trong không gian (d) = (P) ∩ (Q); đường tròn trong không gian (C) = (P) ∩ (S).
* Với các bài toán hình không gian : cần lập hệ trục tọa độ.