BÀI TẬP LỚN MÔN GIẢI TÍCH 2

GVHD: NGUYỄN NGỌC QUỲNH NHƯ

STT	HỌ VÀ TÊN	MSSV
1	LÊ HẢI HẬU(NT)	41201037
2	HOÀNG HẢI TRIỀU	21304310
3	TRƯƠNG QUỐC TUẤN	61104030
4	PHẠM HOÀNG TRUNG	31003674
5	LÊ HOÀNG QUÂN	31303209
6	ĐÀO ĐỨC THẮNG	20902537

ĐỀ TÀI :

<u>Câu 1:</u> Xuất kết quả vi phân cấp 2 của hàm 3 biến f tại điểm M cho trước dưới dạng ma trận vuông

<u>Câu 2:</u> Tìm cực trị của hàm đa thức f(x,y) thỏa điều kiện $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ =1 với a,b>0 được nhập từ bàn phím

<u>Câu3</u>: Tính $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz$ trong đó Ω là miền giới hạn bởi :

($z = 1 - x^2 - y^2$; z=0; y=x ; $y = \sqrt{x}$)

Câu 1:

- ***Cơ sở lý thuyết:***

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm:

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a,b) và x_0 ( )

( ) ( ) (( ) ( ))

Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm tại x_0 thì nó liên túc tại điểm đó.

2. Ý nghĩa của đạo hàm

➢ Ý nghĩa hình học

f’(x_0)là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại M (x_0,f(x_0))

Khi đó, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại M (x_0,y_0) là:

$$y-y_0 = f'(x_0).(x-x_0)$$

- Ý nghĩa vật lý

Vận tốc tức thời của chuyển động thẳng xác định bởi phương trình s = s(t) tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$

Cường độ tức thời của điện lượng Q = Q(t) tại thời điểm t_0 là $I(t_0) = Q'(t_0)$

3. Quy tắc tính đạo

hàm: $C' = 0$ $\quad x' = 1 \quad (x^n)' = nx^{n-1} \ (n \in N, n > 1)$

$(u \pm v)' = u' + v' \quad (uv)' = u'v + uv' \quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \ (v \neq 0)$

$(ku)' = ku' \quad \left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

Đạo hàm của hàm số hợp: Nếu u = g(x) có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số y = f(u) có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm số hợp y = f(g(x)) có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u.u'_x$

Đạo hàm cấp cao:

$$f''(x) = [f'(x)]' ; f'''(x) = [f''(x)]' ; f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' \ (n \in N, n \geq 4)$$

3. Các cách tính đạo hàm

➢ Theo định nghĩa

Để tính đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_0 bằng định nghĩa, ta thực hiện các bước

B1: Giả sử là số gia của đối số tại x_0. Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

B2: Tính $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

- ***VÍ DỤ:***

Xuất kết quả vi phân cấp 2 của hàm $f = 5x^3 + 2y^3 + 3z^3 - 10x^2y + 2yz^2 + 4xz$ tại điểm ( ) dưới dạng ma trận vuông.

Tính các tích phân bậc 2 của hàm f, ta có:

$f'_x = 15x^2 - 20xy + 4z \qquad f'_z = 9z^2 + 4yz + 4x$

$f'_y = 6y^2 - 10x^2 + 2z^2 \qquad f''_{xx} = 30x - 20y$

$f''_{yy} = 12y - 10$

$f''_{xz} = 4$

$f''_{zz} = 18z + 4y$

$f''_{yz} = 4z$

$f''_{xy} = -20x$

Tính các tích phân bậc 2 của hàm f tại điểm M(0,1,1) ta có:

$f''_{xx} = 30 \times 0 - 20 \times 1 = -20$

$f''_{xy} = -20 \times 0 = 0$

$f''_{yy} = 12 \times 1 - 10 = 2$

$f''_{xz} = 4$

$f''_{zz} = 18 \times 1 + 4 \times 1 = 22$

$f''_{yz} = 4 \times 1 = 4$

Từ kết quả trên, ta xuất ra kết quả vi phân cấp 2 của hàm đã cho tại điểm ( ) dưới dạng ma trận vuông là:

$$A = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 22 \end{bmatrix}$$

- ***CODE:***

Editor - D:\gt2\New folder\cau1.m

```
function cau1
syms x y z x0 y0 z0
f=input('nhap f(x,y,z)=');
M=input('nhap M(xM,yM,zM)=');
x0=M(1);
y0=M(2);
z0=M(3);
A(1,1)=subs(diff(diff(f,x),x),[x y z],[x0 y0 z0]);
A(1,2)=subs(diff(diff(f,x),y),[x y z],[x0 y0 z0]);
A(1,3)=subs(diff(diff(f,x),z),[x y z],[x0 y0 z0]);
A(2,1)=subs(diff(diff(f,x),y),[x y z],[x0 y0 z0]);
A(2,2)=subs(diff(diff(f,y),y),[x y z],[x0 y0 z0]);
A(2,3)=subs(diff(diff(f,z),y),[x y z],[x0 y0 z0]);
A(3,1)=subs(diff(diff(f,x),z),[x y z],[x0 y0 z0]);
A(3,2)=subs(diff(diff(f,z),y),[x y z],[x0 y0 z0]);
A(3,3)=subs(diff(diff(f,z),z),[x y z],[x0 y0 z0]);
A
end
```

- ***CHẠY THỬ:***

MATLAB R2012a

```
>> cau1
nhap f(x,y,z)=5*x^3+2*y^3+3*z^3-(10*x^2)*y+2*y*z^2+4*x*z
nhap M(xM,yM,zM)=[0 1 1]

A =

   -20     0     4
     0    12     4
     4     4    22

>>
```

CÂU 2:

- ***CƠ SỞ LÝ THUYẾT:***

1. Mô hình bài toán tìm cực trị có điều kiện:

Xét bài toán: tìm cực trị của hàm ( )( ) *, trong đó x, y là các biến thỏa điều kiện* ( ) ( ).

Nhận xét: mô hình bài toán có điều kiện chỉ xét với điều kiện (2) là 1 phương trình. Như vậy nếu điều kiện (2) có dạng: g(x,y) < 0 (hoặc g(x,y) > 0) (2′) thì được hiểu là tìm cực trị địa phương của hàm z = f(x,y), trong đó ta chỉ xét những điểm dừng nằm trong miền thỏa mãn điều kiện (2′).

2. Định nghĩa:

Ta nói rằng hàm (( ) với điều kiện ( )) đạt cực tiểu tại ( ) nếu tồn tại một lân cận ( )của M0 sao cho: ( ) ( ) ( ) (

thỏa: g(x,y) = 0

Thông thường, phương trình f(x,y) = 0 là phương trình của đường cong (C). Như vậy, ta chỉ so sánh ( ) với ( ) khi M nằm trên (C).

Tương tự, ta cũng có định nghĩa cực đại có điều kiện.

Cực tiểu có điều kiện và cực đại có điều kiện được gọi chung là cực trị có điều kiện..

3. Các phƣơng pháp tìm cực trị có điều kiện:

➢ Cách 1: Đƣa về bài toán tìm cực trị của hàm 1 biến

Nếu từ điều kiện (2) ta giải tìm được y = y(x) thì khi thế vào hàm số f(x,y) ta có z là hàm theo 1 biến số x: (( )) . Như vậy, bài toán trở về bài toán tìm cực trị của hàm số 1 biến. ——> Quá quen thuộc!!!

➢ Cách 2: Phương pháp Larrange

Nếu từ pt (2) ta không giải tìm y theo x được. Khi đó, giả sử (2) xác định 1 hàm ẩn theo biến x: . Để tồn tại hàm số ẩn, ta giả thiết: — (*)

Như vậy: hàm số ( ) , với y là hàm theo x chính là hình ảnh hàm số hợp của biến số x thông qua biến trung gian y.

Với những giá trị của x làm cho z có thể có cực trị thì đạo hàm của z theo x phải triệt tiêu. Vậy lấy đạo hàm của (1) theo biến x với quy tắc hàm hợp (nhớ rằng y là hàm theo x) ta có: $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0$ (3)

Từ điều kiện (2), ta lấy đạo hàm 2 vế theo x. Ta có: $\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0$ (4)

Đẳng thức (4) này được thỏa mãn với mọi x, y thỏa mãn phương trình (2).

Như vậy, tại những điểm cực trị thỏa mãn điều kiện (2) thì sẽ thỏa mãn (3) và (4)

Nhân các số hạng của (4) với hệ số chưa xác định λ và cộng chúng với các số hạng tương ứng của (3), ta được: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\gamma\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial g}{\partial y}\right)=0$ (5)

Do đó, phương trình (5) cũng nghiệm đúng tại những điểm cực trị thỏa điều kiện (2). Từ (5), ta chọn hằng số λ sao cho tại những điểm cực trị, hệ số của $\frac{dy}{dx}$ sẽ triệt tiêu.

Nghĩa là: $\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\gamma\frac{\partial g}{\partial y}\right)=0$ (6)

Vì vậy, từ phương trình (5) và (6) ta có: những điểm cực trị có điều kiện sẽ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \gamma\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Bây giờ, ta xét hàm số Larrange: $F(x,y,\gamma)=f(x,y)+\gamma g(x,y)$

Khi đó các điểm cực trị địa phương của hàm Larrange sẽ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} F'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \gamma \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ F'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \gamma \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ F'_\gamma = g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Từ (I) và (II) ta nhận thấy: những điểm dừng của hàm Larrange có thể là cực trị của hàm z = f(x,y) với điều kiện (2).

Như vậy, bài toán cực trị có điều kiện trở về bài toán cực trị địa phương của hàm Larrange. Ở đây chỉ đóng vai trò phụ và sau khi tìm được giá trị thì không cần đến.

Điều kiện của cực trị có điều kiện liên quan đến việc khảo sát dấu của vi phân cấp 2 của hàm Larrange tại điểm ( ) :

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)\,dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\,dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0)dy^2$$

trong đó: dx, dy không phải là những giá trị bất kỳ mà phải thỏa điều kiện:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\,\mathrm{dy} = 0 \text{ với } dx^2 + dy^2 \neq 0$$

Nếu $d^2F > 0$ với mọi giá trị có thể có của dx, dy thì hàm z = f(x,y) đạt cực tiểu có điều kiện. Nếu $d^2F < 0$ với mọi giá trị có thể có của dx, dy thì hàm z = f(x,y) đạt cực đại có điều kiện.

Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp việc xét dấu vi phân cấp 2 hơi phức tạp. Khi đó, ta có thể áp dụng kết quả sau: Giả sử ( ) là 1 điểm dừng của hàm Larrange, ứng với giá trị và đặt

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0);\ B = F''_{xy}(x_0, y_0);\ C = F''_{yy}(x_0, y_0);\ \mathrm{D} = g'_x(x_0, y_0);\ E = g'_y(x_0, y_0)$$

Khi đó xét: $\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & D & E \\ D & A & B \\ E & B & C \end{vmatrix}$

Nếu Δ > 0 thì hàm z = f(x,y) đạt cực tiểu có điều kiện tại ( )

Nếu Δ < 0 thì hàm z = f(x,y) đạt cực đại có điều kiện tại ( )

- ***VÍ DỤ:***

Cho hàm số f(x,y) = x^2 + y – 1. Tìm cực trị của hàm f sao cho thỏa điều kiện $x^2 - y^2 = 1$.

Ta có $x^2 - y^2 = 1$ $x^2 = y^2 + 1$ (*) (x^2 1)

Thay (*) vào f(x,y) ta được:

f(y) = y^2 + y (y R)

Tập xác định: D = R

Xét f'(y) = 2y + 1 = 0

— ( )

(–) –

Xét (–) –

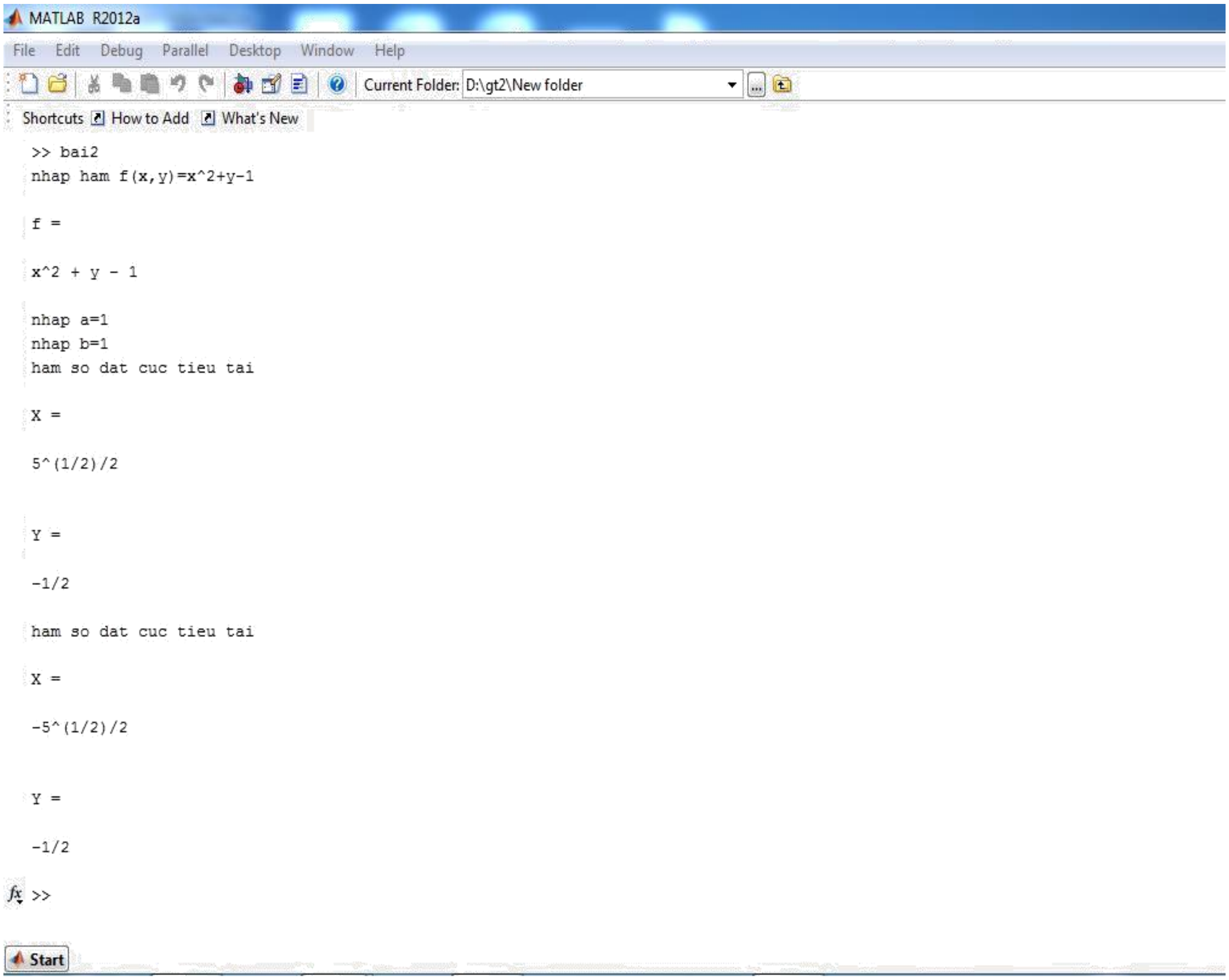
Vậy M(–, –) là cực tiểu duy nhất của f(x,y) khi y = –và x = —

- ***CODE:***

Editor - D:\gt2\New folder\bai2.m

```
function bai2
syms x y
f=input('nhap ham f(x,y)=')
a=input('nhap a=');
b=input('nhap b=');
g=x^2/a^2 - y^2/b^2 -1;
syms z
f1=diff(f,x)+z*diff(g,x);
f2=diff(f,y)+z*diff(g,y);
[w t k]=solve(f1,f2,g);
f=f+z*g;
for i=1:length(w)
if imag(w(i))==0 && imag(t(i))==0 && imag(k(i))==0
A=subs(diff(f,x,2),[x y z],[w(i) t(i) k(i)]);
B=subs(diff(diff(f,x),y),[x y z],[w(i) t(i) k(i)]);
C=subs(diff(f,y,2),[x y z],[w(i) t(i) k(i)]);
D=subs(diff(g,x),[x y z],[w(i) t(i) k(i)]);
E=subs(diff(g,y),[x y z],[w(i) t(i) k(i)]);
denta=det([0 D E;D A B;E B C]);
if denta > 0
    disp('ham so dat cuc dai tai');
   X= w(i)
   Y= t(i)
elseif denta<0
   disp('ham so dat cuc tieu tai');
   X= w(i)
   Y= t(i)
end
end
end
```

- ***CHẠY THỬ:***



CÂU 3:

- ***CƠ SỞ LÝ THUYẾT:***

1. Địng nghĩa:

Cho hàm số f(x,y,z) xác định trong miền đóng, giới nội V của không gian Oxyz.

Chia miền V thành n miền nhỏ có thể tích là $\Delta V_1, \ldots, \Delta V_n$. Lấy tùy ý một điểm M_i-(x_i,y_i,z_i) trong miền nhỏ thứ i.

n

Lập tổng: $I_n = \sum_{i=1} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$

Nếu giới hạn $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{\max d_i \to 0} I_n = I$ hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia miền V, và M_i thì f(x,y,z) gọi là khả tích trên miền V, và I gọi là tích phân bội 3 của hàm f trên V, ký hiệu: $I = \iiint_V f(x, y, z)\, dV$

Tương tự như tích phân kép, ta ký hiệu dxdydz thay cho dV và tích phân bội 3 thường viết: $I = \iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$ (thể tích của V)

Chú ý: Nếu f(x,y,z) = 1 thì $I = \iiint_V f(x, y, z)\, dV$ (thể tích của V)

2. Tính chất:

- $I = \iiint_V Cf(x, y, z)\, dV = C \iiint_V f(x, y, z)\, dV$
- $I = \iiint_V [f(x, y, z) + g(x, y, z)]dV = \iiint_V f(x, y, z)\, dV + \iiint_V g(x, y, z)\, dV$
- Nếu $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \varnothing$ thì:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV = \iiint_{V_1} f(x, y, z)\, dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z)\, dV$$

- Nếu $f(x, y, z) \geq g(x, y, z); \forall (x, y, z) \in V$ thì:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dV \geq \iiint_V g(x, y, z)\, dV$$

- Nếu f(x,y,z) liên tục trong miền đóng, bị chặn V thì tồn tại điểm $(x_0, y_0, z_0) \in V$ sao cho: $f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V} \iiint_V f(x, y, z)\, dV$ (Đinh lý về giá trị trung bình)

3. Cách tính tích phân bội ba

- **Tích phân bội ba trong hệ tọa độ Descartes**

Cho V giới hạn bởi: mặt trên $z = \varphi_2(x, y)$, mặt dưới $z = \varphi_1(x, y)$

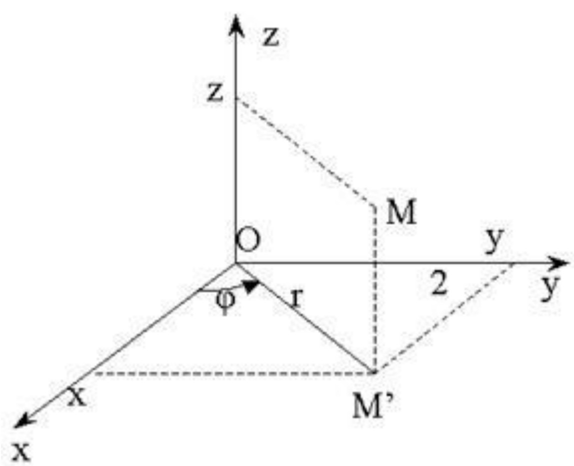
Xung quanh mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz và đường chuẩn là biên của miền D thuộc mặt phẳng Oxy. (D là hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy).

Khi đó: $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right] dxdy$

Nếu miền $D = \{(x, y) : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ thì:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz$$

- **Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ:**



Tọa độ trụ của điểm M(x,y,z) là bộ ba số (r, φ, z) (r, φ) là tọa độ cực của hình chiếu với của M xuống mặt phẳng Oxy (Hình vẽ)

Ta luôn có: $r \ge 0;\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ -\infty < z < +\infty$

Mối liên hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ trụ: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$

Ta có: $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi dz$

➢ **Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu:**

Tọa độ cầu của một điểm M(x,y,z) là bộ ba số (r, θ, φ) với $r = OM$, θ là góc giữa trục Oz và $\overline{OM}$, φ là góc giữa trục Ox và $\overline{OM}$, với M’ là hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy.

Ta có: Với mọi điểm M trong không gian thì $r \geq 0$; $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Mối liên hệ giữa tọa độ Descartes và tọa độ cầu: $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$

Công thức tính tích phân trong hệ tọa độ cầu:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

- ***VÍ DỤ:***
- ( ) ∭
- Trong đó miền giới hạn là:
- **; z = 0; y = x;** ;
- ( ) ∫ ∫√
- **= D_1 + D_2**
- Tính D_1

∫∫ ( )

- ∫ ( )
-

- ( ) ( ) √ ( ) √ ( ) √
- Tính D_2
- ∫ ∫ √ ∫
- ∫ ∫ √ ( )
- ∫ ( )
- ∫ ∫ ∫ ( )
-
- Tính d_1
- ∫
- Đặt x = sint, (* +) => {
- {
- ∫
-
- ∫
- ∫ ( )
-
- ( ) ( )
- ( )
- Tính d_2
- ∫
- Đặt x = sint, (* +) => {

- {
- Khi đó:
- Tính d_3
- **Suy ra**
- **= 0.0887**

-

- ***CODE:***

- ***CHẠY THỬ:***